STP 工具箱简介

主讲人：齐洪胜

中国科学院数学与系统科学研究院
qihongsh@amss.ac.cn

2020 半张量积暑期研修班
聊城大学矩阵半张量积理论与应用研究中心
2020 年 8 月 17 日

简介

☞ 为什么开发 STP 工具箱？

- 矩阵半张量积（STP）是一种新的矩阵乘法
- 随着我们的研究逐步完善
- ...

☞ 为什么使用 Matlab/Octave？

- 流行/简单/敏捷...
- Matlab 是商业软件，GNU Octave 开源免费（推荐使用，兼容 Matlab 语法）
- 移植到别的语言：C/C++/Python/R/Go/Lua/Julia/...

☞ 如何获取？

`http://lsc.amss.ac.cn/~dcheng/stp/STP.zip`

当前版本发布于：2016 年 9 月 7 日（兼容 Matlab 和 Octave）。

简介

☞ 为什么开发 STP 工具箱？

- 矩阵半张量积（STP）是一种新的矩阵乘法
- 随着我们的研究逐步完善
- ...

☞ 为什么使用 Matlab/Octave？

- 流行/简单/敏捷...
- Matlab 是商业软件，GNU Octave 开源免费（推荐使用，兼容 Matlab 语法）
- 移植到别的语言：C/C++/Python/R/Go/Lua/Julia/...

☞ 如何获取？

`http://lsc.amss.ac.cn/~dcheng/stp/STP.zip`

当前版本发布于：2016 年 9 月 7 日（兼容 Matlab 和 Octave）。

简介

☞ 为什么开发 STP 工具箱？

- 矩阵半张量积（STP）是一种新的矩阵乘法
- 随着我们的研究逐步完善
- ...

☞ 为什么使用 Matlab/Octave？

- 流行/简单/敏捷...
- Matlab 是商业软件，GNU Octave 开源免费（推荐使用，兼容 Matlab 语法）
- 移植到别的语言：C/C++/Python/R/Go/Lua/Julia/...

☞ 如何获取？

`http://lsc.amss.ac.cn/~dcheng/stp/STP.zip`

当前版本发布于：2016 年 9 月 7 日（兼容 Matlab 和 Octave）。

简介

☞ 如何安装？

- 从 `http://lsc.amss.ac.cn/~dcheng/stp/STP.zip` 下载
- 解压缩到任意目录
- 添加/path/to/stp/toolbox 到 Matlab/Octave 搜索路径中
  注：`stp_install`、`stp_uninstall`、`setstppath`
- 开始使用

☞ STP 工具箱包括

- 一些基本的 m 函数
- 两个类或对象：`stp` 和 `lm`
- 一些例子
- 使用手册

简介

☞ 如何安装?

- 从 `http://lsc.amss.ac.cn/~dcheng/stp/STP.zip` 下载
- 解压缩到任意目录
- 添加/path/to/stp/toolbox 到 Matlab/Octave 搜索路径中
  注：`stp_install`、`stp_uninstall`、`setstppath`
- 开始使用

☞ STP 工具箱包括

- 一些基本的 m 函数
- 两个类或对象：`stp` 和 `lm`
- 一些例子
- 使用手册

STP 的计算 I

定义

设 $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ 和 $B \in \mathcal{M}_{p\times q}$。$A$ 和 B 的（左）半张量积定义为

$$A \ltimes B = (A \otimes I_{t/n})(B \otimes I_{t/p}), \tag{1}$$

其中 t 是 n 和 p 的最小公倍数，$\otimes$ 是 Kronecker 积（张量积）。

STP 的计算 II

定义

1. 设 X 是长度为 np 的行向量，Y 为长度为 p 的列向量。将 X 等为 p 份：$X=(X^1,\cdots,X^p)$，这里 $X^i\in\mathbb{R}^n$，$i=1,\ldots,p$。定义

$$\begin{cases} X\ltimes Y=\sum_{i=1}^{p}X^iy_i\in\mathbb{R}^n,\\ Y^T\ltimes X^T=\sum_{i=1}^{p}y_i(X^i)^T\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2}$$

2. 设 $A\in\mathcal{M}_{m\times n}$ 和 $B\in\mathcal{M}_{p\times q}$。如果 n 是 p 的因子，即 $nt=p$，记作 $A\prec_t B$，或者 p 是 n 的因子，即 $n=pt$，记作 $A\succ_t B$，于是 A 和 B 的（左）半张量积，记作 $C=A\ltimes B$，定义如下：$C=(C^{ij})$ 由 $m\times q$ 个块组成且每块为

$$C^{ij}=A^i\ltimes B_j,\quad i=1,\cdots,m,\quad j=1,\cdots,q,$$

其中 A^i 是 A 的第 i 行，B_j 是 B 的第 j 列。

STP 的计算 III

☞ 两种方式

- m 函数： sp, sp1, spn
- stp 类： 重载 mtimes ...

☞ 例

- example01.m
- example02.m

lm 类 I

定义

1. 一个 $n \times p$ 矩阵 A 称作逻辑矩阵，如果

$$A = \left[\delta_n^{i_1}\ \delta_n^{i_2}\ \cdots\ \delta_n^{i_p}\right], \tag{3}$$

其中 δ_n^i 是单位阵 I_n 的第 i 列。

2. 逻辑矩阵的简化形式（同 (3) 中的 A）记作

$$A = \delta_n[i_1, i_2, \cdots, i_p]. \tag{4}$$

注

根据式 (4)，一个 $n \times p$ 逻辑矩阵可以由一个维数为 p 的向量和一个参数 n 描述。在 STP 工具箱中，描述逻辑矩阵的 lm 对象记为

$$\begin{cases} \texttt{lm}.n = n, \\ \texttt{lm}.v = [i_1, i_2, \cdots, i_p]. \end{cases} \tag{5}$$

lm 类 II

- $M = lm(A)$ 或 $M = lm(v, n)$
- $C = lsp(A, B)$
- $C = lspn(A_1, A_2, \cdots, A_n)$
- $M = leye(n)$: identity matrix
- $M = lmn(k)$: negation
- $M = lmc(k)$: conjunction
- $M = lmd(k)$: disjunction
- $M = lmi(k)$: implication
- $M = lme(k)$: equivalance/biconditional
- $M = lmr(k)$: power-reducing matrix
- $M = lmu(k)$: dummy matrix
- $M = lmrand(m, n)$ or $M = randlm(m, n)$
- $M = lwij(m, n)$: swap matrix

例：example03.m

逻辑表达式 $\Rightarrow$ 矩阵形式

例 (example04.m)

三个人 A、B 和 C. A 说 B 说谎, B 说 C 说谎, C 说 A 和 B 都说谎. 那么他们中到底谁在说谎?

A: A 没说谎; B: B 没说谎; C: C 没说谎。陈述的逻辑表达式 $L(A,B,C)$ 为

$$(A \leftrightarrow \neg B) \wedge (B \leftrightarrow \neg C) \wedge (C \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B).$$

它的矩阵形式为

$$M_c^2(M_eAM_nB)(M_eBM_nC)(M_eCM_cM_nAM_nB)$$

可以计算其规范型为

$$L(A,B,C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} ABC.$$

L 为真, 当且仅当

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

结论: 只有 B 没有说谎.

逻辑表达式 $\Rightarrow$ 矩阵形式

例 (example04.m)

三个人 A、B 和 C. A 说 B 说谎, B 说 C 说谎, C 说 A 和 B 都说谎. 那么他们中到底谁在说谎?

A：A 没说谎；B：B 没说谎；C：C 没说谎。陈述的逻辑表达式 $L(A,B,C)$ 为

$$(A \leftrightarrow \neg B) \wedge (B \leftrightarrow \neg C) \wedge (C \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B).$$

它的矩阵形式为

$$M_c^2(M_eAM_nB)(M_eBM_nC)(M_eCM_cM_nAM_nB)$$

可以计算其规范型为

$$L(A,B,C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} ABC.$$

L 为真, 当且仅当

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

结论: 只有 B 没有说谎.

布尔网络的相关计算

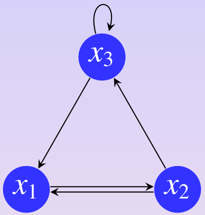

图 1: 网络图

$x_i \in \{0, 1\}$

1: on/active/expressed

0: off/inactive/unexpressed

- 布尔网络

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \wedge x_3(t) \\ x_2(t+1) = \neg x_1(t) \\ x_3(t+1) = x_2(t) \vee x_3(t) \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{tikzcd}
(1,0,0) \arrow[r] & (0,0,0) \arrow[r] & (0,1,0) \arrow[r] & (0,1,1) \arrow[r] & (1,1,1) \arrow[d] \\
 & & (1,1,0) \arrow[r] & (0,0,1) \arrow[u] & (1,0,1) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

图 2: 状态图

例： example_bn(01–06).m

- *lmset* 和 *lmget*
  - EyeFunc: [string], default is ‘leye(%s)’
  - KronFunc: [string], default is ‘(%s+%s)’
  - StpFunc: [string], default is ‘(%s*%s)’
  - SwapMatrixFunc: [string], default is ‘lwij(%d)’
  - ToLaTeX: [1 or 0]
  - VarSort: [1 or 0]
  - Vars: [cell]
- Khatri-Rao 积：`lm` 类中的 *ctimes*

Homework

- 下载 Octave 并安装
- 安装 STP 工具箱
- 利用 STP 工具箱计算前两次讲课中的例子以及后续讲课中你感兴趣的例子

Thank You !

Q&A