矩阵的半张量积随想录之一:
从矩阵到矩阵半张量积

程代展

中国科学院数学与系统科学研究院
聊城大学矩阵半张量积理论与应用研究中心

聊城大学数学学院

2022年9月29日 山东、聊城

主要内容

1. 矩阵半张量积的由来
2. 矩阵半张量积的性质
3. 在连续动态系统中的应用
4. 历史与现状
5. 小结

I. 矩阵半张量积的由来

☞ 矩阵的思想起源于中国

矩阵理论是被公认起源于中国的一个数字分支.

- 在美国哥伦比亚特区大学教授Katz 著名数字史一书[1] 中指出:"矩阵的思想历史悠久, 它的使用至少可追溯到汉朝, 中国学者用它来解线性方程组."
- 在英国学者Crilly 的书[2] 中也提到: 矩阵起源于"公元前200年, 中国数学家使用了数字阵列".

矩阵理论是这两本书中唯一提到的始自中国的数学分支，大概确实是仅见的.

[1] V.J. Katz, *A History of mathematics*, Brief Version, Addison-Wesley, New York, 2004.

[2] T. Crilly, *50 Mathenatical Ideas You Really Need to Know*, 王悦译, "你不可不知的50个数学知识"，人民邮电出版社, 北京, 2012.

☞ 矩阵理论的诞生

时间：十九世纪；创始人：

- Cauchy(法，1789-1857): 行列式(determinant); 乘积(multiplication); 伴随(adjoint);
- Sylvester(英，1841-1897): 矩阵(matrix); 特征值(eigenvalue 乘积的秩(rank of product);
- Cayley(英，1821-1895): 特征多项式(characteristic polynomial);
  Caley-Hamiltonian 定理（Caley-Hamiltonian Theorem);
- Frobenies(德, 1849-1917): 相似(similar)；合同(congruence 秩(rank)；线性无关(linearly independence)；
- ...

☞ 对高阶数组矩阵方法的探索

熟知, 一个线性函数$f(x_1,\cdots,x_n)$ 很容易用向量积表示:

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i=cx, \tag{1}$$

这里, $c=[c_1,\cdots,c_n]$, $x=[x_1,\cdots,x_n]^T$.
一个双线性函数也很容易用矩阵形式表示:

$$g(x_1,\cdots,x_m y_1,\cdots,y_n)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_iy_j=x^TAy, \tag{2}$$

这里,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

在许多科学问题中会出现三线性或更高阶线性函数。即

$$f(x_1,\cdots,x_py_1,\cdots,y_n,z_1,\cdots,z_m)=\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{k,i,j}x_ky_iz_j. \tag{3}$$

三线性函数能不能用矩阵表示呢?

从二十世纪八十年代开始, 国内外一些学者开始探讨用立体积表示三阶数组的运算, 如图1 所示.

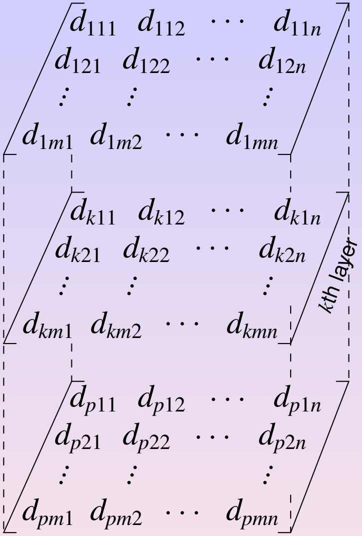

d_{111} d_{112} $\cdots$ d_{11n}
d_{121} d_{122} $\cdots$ d_{12n}
$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$
d_{1m1} d_{1m2} $\cdots$ d_{1mn}
d_{k11} d_{k12} $\cdots$ d_{k1n}
d_{k21} d_{k22} $\cdots$ d_{k2n}
$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$
d_{km1} d_{km2} $\cdots$ d_{kmn}
kth layer
d_{p11} d_{p12} $\cdots$ d_{p1n}
d_{p21} d_{p22} $\cdots$ d_{p2n}
$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$
d_{pm1} d_{pm2} $\cdots$ d_{pmn}

图 1: 一个立体阵

☞ 从多线性运算到矩阵半张量积

立体阵存在问题：

- 运算规则复杂,
- 缺少一般性, 很难推广到三阶以上的更高阶数组上去。

考虑(3) 中的三线性函数$f:\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. 那么, 固定$x$的分量$x_k\in\mathbb{R}$, 则对$y\in\mathbb{R}^m$, $z\in\mathbb{R}^n$, 我们有

$$f(x_k,y,z)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{k,i,j}y_iz_jx_k, \tag{4}$$

它是一个二次型式, 其结构矩阵为立体阵图1 中的第k 层。因此，$f(x,y,z)$ 可以看作关于y, z 的二次型, 其结构矩阵为

$$A(x) = \sum_{k=1}^{p} A_k x_k, \tag{5}$$

这里A_k 是立体阵第k 层。
因此, 关于x, y, z 的三线性函数(4) 可以降次为关于y, z 的双线性函数:

$$f(x, y, z) = y^T A(x) z. \tag{6}$$

这里, 结构矩阵(5) 能否用矩阵乘积表示呢? 我们不妨形式地把它写成

$$A(x) = [A_1, A_2, \cdots, A_p] * x, \tag{7}$$

这里的"乘积" 就是矩阵半张量积，用$\ltimes$ 表示这种乘法。
通过这种"数"与"块"的乘积, 矩阵半张量积达到降次的目的。利用这个道理, 任何高次数组乘法都可以降到一次数组与一次数组的乘积。

现在假定$f:\prod_{i=1}^n V_i \to \mathbb{R}$，为$n$ 线性函数, 这里, V_i 为r_i 维向量空间, 基底为$\{\delta_{r_i}^1, \delta_{r_i}^1, \cdots, \delta_{r_i}^{r_i}\}$. 设

$$f\left(\delta_{r_1}^{k_1}, \delta_{r_2}^{k_2}, \cdots, \delta_{r_n}^{k_n}\right) = d_{k_1,k_2,\cdots,k_n}, \quad k_i = 1, \cdots, r_i;\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

将所有常数依字母序排列一行:

$$\begin{aligned} D &= [d_{1,1,\cdots,1}, d_{1,1,\cdots,1}, \cdots, d_{1,1,\cdots,r_n}; \cdots; d_{r_1,r_2,\cdots,1}, \\ &\quad d_{r_1,r_2,\cdots,2}, \cdots, d_{r_1,r_2,\cdots,r_n}]. \end{aligned}$$

那么, 类似三次情况, 我们有

$$f(x_1, \cdots, x_n) = D \ltimes x_1 \ltimes x_2 \cdots \ltimes x_n. \tag{8}$$

☞ 一般化的矩阵半张量积

Definition 1.1

设A 为$m \times n$ 矩阵, B 为$p \times q$ 矩阵, n 与p 的最小公倍数为$t = \mathrm{lcm}(n, p)$, 则A 与B 的半张量积定义为

$$A \ltimes B = \left(A \otimes I_{t/n}\right)\left(B \otimes I_{t/p}\right). \tag{9}$$

这里$\otimes$ 是kronecker 积:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & & & \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix}$$

Example 1.2

(i) 设$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$，$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. 那么，

$$X \ltimes Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot 1 + \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot 2 = \begin{bmatrix} 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

(ii) 设$X = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$，$Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$. 那么，

$$X \ltimes Y = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1 + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot 2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot (-2) = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

(iii) 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Example 1.2(Cont'd)

那么，

$$A \ltimes B = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 & -5 \\ 4 & 7 & -5 & -8 \\ 5 & 2 & -7 & -4 \end{bmatrix}.$$

Example 1.3(叉积运算)

设$U = U_xi + U_yj + U_zk \in \mathbb{R}^3$, $V = V_xi + V_yj + V_zk \in \mathbb{R}^3$，则

$$U \vec{\times} V = (U_yV_z - U_zV_y)i - U_xV_z - U_zV_x)j + (U_xV_y - U_yV_x)k.$$

Example 1.3(Cont'd) (叉积运算)

如果用矩阵半张量积, 则

$$U\vec{\times}V = Muv, \tag{10}$$

这里$u = (U_x, U_y, U_z)^T$, $v = (V_x, V_y, V_z)^T$,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

叉积的这种表示方式无论在数值计算或理论推导上都会带来许多便利。例如对多重叉积

$$u_1\vec{\times}u_2\vec{\times}\cdots\vec{\times}u_n = M^{n-1}\ltimes_{i=1}^{n} u_i.$$

II. 矩阵半张量积的性质

☞ 继承自普通矩阵乘法

Proposition 2.1

设$A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{p\times q}$. 如果$n = p$, 则

$$A \ltimes B = AB. \tag{11}$$

因此，矩阵半张量积是矩阵普通积的一个推广！ 并且，它继承了的几乎所有普通积的主要性质！

Proposition 2.2

(i) (分配律)

$$\begin{aligned} &A \ltimes (\alpha B + \beta C) = \alpha A \ltimes B + \beta A \ltimes C; \\ &(\alpha B + \beta C) \ltimes A = \alpha B \ltimes A + \beta C \ltimes A, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{12}$$

Proposition 2.2(cont'd)

(2) (结合律)

$$A \ltimes (B \ltimes C) = (A \ltimes B) \ltimes C. \tag{13}$$

Proposition 2.3

(i)

$$(A \ltimes B)^T = B^T \ltimes A^T. \tag{14}$$

(ii) 设A 与B 均可逆，则

$$(A \ltimes B)^{-1} = B^{-1} \ltimes A^{-1}. \tag{15}$$

☞ 区别于普通矩阵乘法的性质

普通矩阵乘法与数乘相比的两大弱点:

(i) 维数的限制;

(ii) 不可交换.

目标: 克服“不可交换性”!

Proposition 2.4(Pseudo-Commutativity)

设$A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

(i) 令$Z \in \mathbb{R}^t$ 为一行向量，则

$$A \ltimes Z = Z \ltimes (I_t \otimes A); \tag{16}$$

(ii) 令$Z \in \mathbb{R}^t$ 为一列向量，则

$$Z \ltimes A = (I_t \otimes A) \ltimes Z. \tag{17}$$

☞ 换位矩阵

Definition 2.5

换位矩阵$W_{[m,n]} \in \mathcal{M}_{mn\times mn}$ 定义如下：

$$W_{[m,n]} = \left[I_n \otimes \delta_m^1, I_n \otimes \delta_m^2, \cdots, I_n \otimes \delta_m^m \right]. \tag{18}$$

Proposition 2.6

(i) 设$X \in \mathbb{R}^m$，$Y \in \mathbb{R}^n$ 为两列向量，则

$$W_{[m,n]} \ltimes X \ltimes Y = Y \ltimes X. \tag{19}$$

(ii) 设$u \in \mathbb{R}^m$，$v \in \mathbb{R}^n$ 为两行向量，则

$$u \ltimes v \ltimes W_{[m,n]} = v \ltimes u. \tag{20}$$

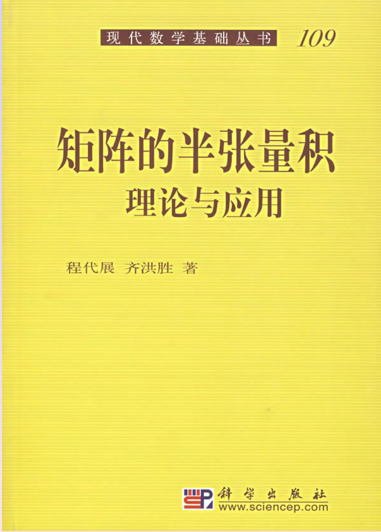
Proposition 2.7

$$W_{[m,n]}^{T} = W_{[m,n]}^{-1} = W_{[n,m]}. \tag{21}$$

☞ 普通积（$\times$） 对比 半张半张量积$\ltimes$

	CP $\times$	STP $\ltimes$
Property	Similar	Similar
Applicability	linear, bilinear	multi-linear
Commutativity	No	Pseudo-Commutative

☞ 早期矩阵半张量积的书



现代数学基础丛书 109
矩阵的半张量积
理论与应用
程代展 齐洪胜 著
科学出版社
www.sciencep.com

系统与控制丛书 C5
程代展 齐洪胜 著
矩阵的半张量积
——理论与应用
（第二版）
科学出版社

III 在连续动态系统中的应用

☞ 多线性映射:

(i) 张量计算;
(张量场的缩并)

(ii) 流形M 上的李代数计算:

$$[\cdot,\cdot] : V(M) \times V(M) \to V(M).$$

(iii) 有限群计算:

$$G \times G \to G.$$

(iv) 多元多项式.

☞ 多元多项式

记$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 为一次列向量，那么, 一个k 阶n 元多项式可表示为

$$P(x) = M_p x^k. \tag{22}$$

Example 3.1

给定$P(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$, 它可表示为

$$P(x) = M_p x^2,$$

这里$x^2 = (x_1^2, x_1x_2, x_2x_1, x_2^2)^T$, $M_P = (1, 4, 0, -1)$.

M_P 不是唯一的, 例如$M_P = (1, 2, 2, -1)$ 也对.

Example 3.1(cont'd)

现在设$P(x)$ 为一个m 次多项式, 则$P(x)$ 可表示为

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} M_k x^k, \tag{23}$$

这里M_k 为一n^k 维行向量.

☞ 多元多项式微分公式

:

Theorem 3.2

设$x = (x_1, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 则

$$D(x^{k+1}) = \Phi_k^n x^k, \tag{24}$$

这里

$$\Phi_k^n = \sum_{s=0}^{k} I_{n^s} \otimes W_{[n^{k-s},n]}. \tag{25}$$

☞ 多元解析函数的台劳展开式

Proposition 3.3

考察$f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2!}D^2f(x_0)(x - x_0)^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{3!}D^3f(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots . \end{aligned} \tag{26}$$

利用(26), 向量场的台劳展式一样可以得到。再利用微分公式(24)-(25), 函数, 向量场, 对偶向量场等对给定向量场的李导数也一一可以计算出来. 从而使非线性控制系统几何理论的代数化、程序化实现成为可能.

☞ 半张量积方法在电力系统的应用

IV. 历史与现状

☞ 矩阵半张量积大事记

:

(1) 国家自然科学基金: "非线性鲁棒稳定控制代数化几何方法及工程应用"(1999-2002).

(2) 从起步到第一篇论文1998-2001

- 程代展, Semi-tensor product of matrices, part 1, Swap matrix and left semi-tensor product; part 2, Properties; part 3, Tensor form of polynomials; part 4, Some applications; part 5, Tensor algebra, 中科院系统所, 稿件编号：E0005-E0009，2000 年1 月7 日.

- Cheng D. Semi-tensor product of matrices and its application to Morgan’s problem. Science in China, Series F, 2001, 44(3): 195-212.

(3) 在连续动态系统中的应用2001-2007

- 最有意义的工作可能是微分系统稳定域的计算[1].
- 质疑声不断.

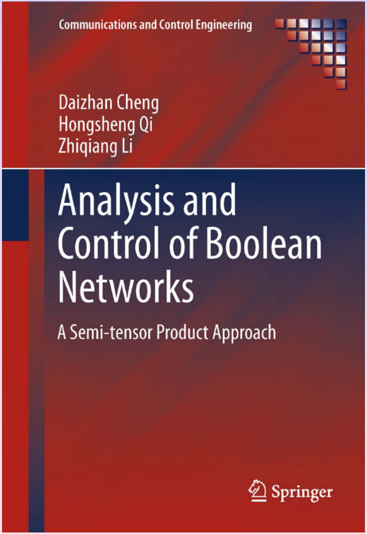
(4) 第一本关于矩阵半张量积的专著[2] 2007.
第一次到访聊城大学2008.

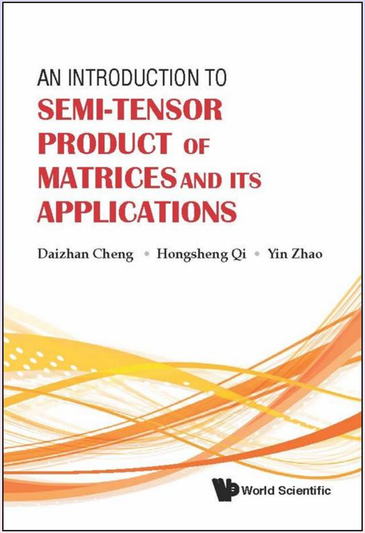
(5) 2008 年初，第三次中瑞双边控制会议. 清华大学赵千川教授报告. 开始关于布尔网络的研究.

[1] Cheng D., Ma J., Lun Q., Mei S., Quadratic form of stable sub-manifold for power systems, Int. J. Robust Nonlin. Contr., 14: 773-788, 2004.

[2] 程代展, 齐洪胜. 《矩阵的半张量积- 理论与应用》, 北京: 科学出版社, 2007 (第二版, 2011).

(6) 关于布尔网络的专著, 2011, 包含有限博弈模型.





(7) Automatica 2008-2010 “最佳理论/方法论论文奖” [1], 2011.

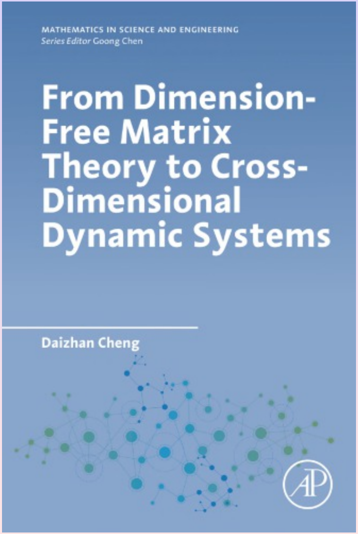
(8) 第一篇关于博弈论半张量积方法论文[2], 2013.

[1] Cheng D, Qi H. Controllability and observability of Boolean networks, Automatica, 45: 1659-1667, 2009.

[2] Guo P., Wang Y., Li. H., Algebraic formulation and strategy optimization for a class of evolutionary networked games via semi-tensor product method, Automatica, 49(11), 3384-3389, 2013.

(9) 科学院杰出科技成就奖, (于渌院士: 有没有新的代数或几何结构?) 开始探讨矩阵半张量积与代数及几何的关系. 2014-

☞ 专著



(10) 聊城大学矩阵半张量积理论及应用研究中心成立, 2018.

☞ 现状

目前, 矩阵半张量积理论已被应用于多学科的理论研究中，包括

- 逻辑系统的分析与控制;
- 有限博弈与博弈控制论;
- 代数与几一几何(泛维系统)
- 模糊控制;
- 有限自动机;
- 图论与队型控制;
- 代数编码; 等。

半张量积方法也被用于一些工程设计中。例如

- 电力系统控制；
- 混合动力车、船的优化控制；等。

目前, 矩阵半张量积的论文作者包括（不完全统计):

中国、意大利、以色列、日本、美国、英国、俄罗斯、瑞典、南非、新加坡、德国、澳大利亚、加拿大、印度、匈牙利、泰国、伊朗、沙特阿拉伯, 等。

国内单位包括（不完全统计):

北京大学、清华大学、哈尔滨工业大学、哈尔滨工程大学、东北大学、青岛海洋大学、北京理工大学、北京邮电大学、南开大学、山东大学、山东师范大学、聊城大学、上海交通大学、同济大学、东南大学、南京师范大学、成都电子科技大学、中南大京、华南理工大学、浙江师范大学、华东科技大学、山东科技大学、河北工业大学、中科院系统所、中科院信息安全所,等。

V. 小结

- 代数化几何方法有待深化：
  - 中国古代：几何代数化法
  - 吴文俊: 数学机械化
  - 微分几何的代数化
  - 信息物理系统, 人工智能
- 矩阵半张量积方法
  - 这是一个极具原创性的新方向, 许多新问题, 新理论, 新应用有待开发.
  - 这是一个易于学懂, 易于参与的新学科.
  - 聊城大学处于学科前沿.
  - 渴望你的加入! (机不可失!)

谢　谢　！

Q&A