矩阵的半张量积随想录之三: 泛维-打破维数的藩篱

程代展

中国科学院数学与系统科学研究院
聊城大学矩阵半张量积理论与应用研究中心

聊城大学数学学院

2022年11月3日 山东、聊城

主要内容

I. 矩阵-矩阵半张量积

☞ 为什么是 I?

回忆矩阵半张量积：$A \in \mathcal{M}_{m\times n}, B \in \mathcal{M}_{p\times q}, t = lcm(n,p)$:

$$A \ltimes B := \left(A \otimes I_{t/n}\right)\left(B \otimes I_{t/p}\right).$$

Q 1: 为何在右边?

$$A \rtimes B := \left(I_{t/n} \otimes A\right)\left(I_{t/p} \otimes B\right).$$

Q 2: 为何用$I := \{I_k \mid k = 1, 2, \cdots\}$?

设

$$\Gamma := \{\Gamma_n :\in \mathcal{M}_{n\times n} \mid n = 1, 2, \cdots\}$$

利用这一族方阵, 我们可以定义:

$$A \ltimes_\Gamma B := \left(A \otimes \Gamma_{t/n}\right)\left(B \otimes \Gamma_{t/p}\right). \tag{1}$$

☞ 对 Γ 的要求:

(i) $\ltimes_{\Gamma}$ 必须是对矩阵普通积的推广.

(ii) $\ltimes_{\Gamma}$ 必须满足分配律与结合律.

Definition 1.1

一族方阵

$$\Gamma := \{\Gamma_n \in \mathcal{M}_{n\times n} \mid n \geq 1\}$$

称为矩阵乘子，如果满足:

(i)

$$\Gamma_n \Gamma_n = \Gamma_n; \tag{2}$$

(ii)

$$\Gamma_p \otimes \Gamma_q = \Gamma_{pq}. \tag{3}$$

☞ 矩阵乘子的性质

Proposition 1.2

Γ_n 的特征值 $\sigma(\Gamma_n) = \{1\}$ 或 $\sigma(\Gamma_n) = \{0, 1\}$. 这里

$$\sigma_{\max}(\Gamma_n) = 1, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{4}$$

Corollary 1.3

$$\Gamma_1 = 1. \tag{5}$$

☞ 基于Γ 的矩阵半张量积

Definition 1.4

设 $\Gamma=\{\Gamma_n, \mid n\geq 1\}$ 为矩阵乘子，$A\in\mathcal{M}_{m\times n}$，$B\in\mathcal{M}_{p\times q}$.

(i) 基于乘子 Γ 的 A 与 B 的矩阵(左)半张量积为

$$A\ltimes_{\Gamma} B:=\left(A\otimes\Gamma_{t/n}\right)\left(B\otimes\Gamma_{t/p}\right). \tag{6}$$

这里$t=lcm(n,p)$.

(ii) 基于乘子 Γ 的 A 与 B 的矩阵(右)半张量积为

$$A\rtimes_{\Gamma} B:=\left(\Gamma_{t/n}\otimes A\right)\left(\Gamma_{t/p}\otimes B\right). \tag{7}$$

☞ 性质

Proposition 1.5

基于矩阵乘子 Γ 的矩阵-矩阵左，右半张量积均为矩阵普通积的推广.

Proposition 1.6

(以下记: $\bowtie \in \{\ltimes, \rtimes\}$.)

- (结合律)

$$(A \bowtie_\Gamma B) \bowtie_\Gamma C = A \bowtie_\Gamma (B \bowtie_\Gamma C). \tag{8}$$

- (分配律)

$$\begin{aligned} (A + B) \bowtie_\Gamma C &:= A \bowtie_\Gamma C + B \bowtie_\Gamma C \\ A \bowtie_\Gamma (B + C) &= A \bowtie_\Gamma B + A \bowtie_\Gamma C. \end{aligned} \tag{9}$$

Proposition 1.6(cont'd)

- (转置)

$$(A \bowtie_{\Gamma} B)^T = B^T \bowtie_{\Gamma} A^T. \tag{10}$$

- (逆)
  设 Γ_n, $n \geq 1$ 可逆. 如果 A 和 B 可逆, 则 $A \bowtie_{\Gamma} B$ 可逆. 并且,

$$(A \bowtie_{\Gamma} B)^{-1} = B^{-1} \bowtie_{\Gamma} A^{-1}. \tag{11}$$

☞ 某些矩阵乘子

Example 1.7

- MM-1 STP: $\Gamma = I := \{I_n\}$:

$$\ltimes_\Gamma = \ltimes; \quad \rtimes_\Gamma = \rtimes.$$

- MM-2 STP: Set

$$J_n := \frac{1}{n}\mathbf{1}_{n\times n}, \quad n = 1, 2, \cdots . \tag{12}$$

Example 1.7(cont'd)

- UL-1: 设 $\Delta_n^U \in \mathcal{M}_{n\times n}$ 为:

$$\left(\Delta_n^U\right)_{i,j} = \begin{cases} 1, & i=1, \text{ and } j=1, \\ 0, & \text{Otherwise.} \end{cases} \tag{13}$$

- DR-1: 设 $\Delta_n^D \in \mathcal{M}_{n\times n}$ 为:

$$\left(\Delta_n^D\right)_{i,j} = \begin{cases} 1, & i=n, \text{ and } j=n, \\ 0, & \text{Otherwise.} \end{cases} \tag{14}$$

II. 矩阵-向量半张量积

☞ 矩阵乘法的作用

- 线性映射的实现：设 $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^n$: $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 定义为:
$$X \mapsto AX \in \mathbb{R}^m.$$
- 线性映射的复合：设 $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$，$B \in \mathcal{M}_{n\times s}$. 则
$$AB \in \mathcal{M}_{m\times s}$$
为 A 与 B 复合的线性映射.

Q 3: 普通矩阵乘法可同时实现两种功能. 矩阵半张量积可否?

回答: No!

定义

$$\mathcal{V} = \mathbb{R}^\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n.$$

设$x \in \mathcal{V}$. 寻找乘法$*^?$, 使得对$A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^\infty$

$$A *^? x \in \mathcal{V}$$

需要矩阵-向量半张量积!

☞ 向量乘子

Definition 2.1

一族非零向量

$$\gamma : \{\gamma_r \in \mathbb{R}^r \mid r \geq 1\}$$

称为向量乘子, 如果它满足以下条件:

(i)

$$\gamma_1 = 1; \tag{15}$$

(ii)

$$\gamma_p \otimes \gamma_q = \gamma_{pq}. \tag{16}$$

☞ 某些向量乘子

Example 2.2

(i)

$$\gamma = \mathbf{1} := \{\mathbf{1}_n \mid n = 1, 2, \cdots\}. \tag{17}$$

(ii)

$$\gamma = \delta^U := \{\delta_n^1 \mid n = 1, 2, \cdots\}. \tag{18}$$

(iii)

$$\gamma = \delta^D := \{\delta_n^n \mid n = 1, 2, \cdots\}. \tag{19}$$

☞ 矩阵-向量半张量积

Definition 2.3

设 Γ 为矩阵乘子, γ 为向量乘子, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^r$, $t = n \vee r$. 则 A 与 x 关于 Γ 及 γ 的矩阵-向量半张量积, 记作 $\vec{\times}$, 定义为

(i) 左矩阵向量半张量积:

$$A \vec{\times}_{\ell} x := \left(A \otimes \Gamma_{t/n}\right)\left(x \otimes \gamma_{t/r}\right). \tag{20}$$

(ii) 右矩阵向量半张量积:

$$A \vec{\times}_{r} x := \left(\Gamma_{t/n} \otimes A\right)\left(\gamma_{t/r} \otimes x\right). \tag{21}$$

Example 2.4

设 $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^r$, $t = n \vee r$. 以下是两类常用的矩阵-向量半张量积:

MV-1 STP:

$$\Gamma = \{I_n \mid n = 1, 2, \cdots\}, \quad \gamma = \{\mathbf{1}_n \mid n = 1, 2, \cdots\}.$$

(i) 左MV-1 矩阵-向量半张量积:

$$A \vec{\ltimes} x := \left(A \otimes I_{t/n}\right)\left(x \otimes \mathbf{1}_{t/r}\right). \tag{22}$$

(ii) 右MV-1 矩阵-向量半张量积:

$$A \vec{\rtimes} x := \left(I_{t/n} \otimes A\right)\left(\mathbf{1}_{t/r} \otimes x\right). \tag{23}$$

Example 2.4(cont'd)

MV-2 STP:

$$\Gamma = \{J_n \mid n = 1, 2, \cdots\}, \quad \gamma = \{\mathbf{1}_n \mid n = 1, 2, \cdots\}.$$

(i) 左MV-2 矩阵-向量半张量积:

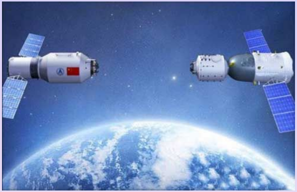
$$A \vec{\circ}_{\ell} x := \left(A \otimes J_{t/n}\right) \left(x \otimes \mathbf{1}_{t/r}\right). \tag{24}$$

(ii) 右MV-2 矩阵-向量半张量积::

$$A \vec{\circ}_{r} x := \left(J_{t/n} \otimes A\right) \left(\mathbf{1}_{t/r} \otimes x\right). \tag{25}$$

III. 泛维数空间

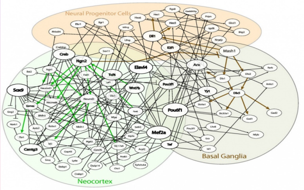
☞ 变维数或维数不确定系统



(a) Spacecraft docking

(b) Vehicle clutch system

(c) Internet



(d) Genetic regulatory networks

图 1: Dimension-varying Systems

☞ 多模态系统: 弦理论

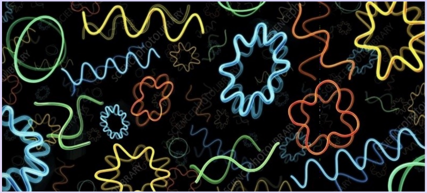


图 **2:** Strings in Physics

Space-time: dimension 4 (Einstein Relativity), 5 (Kalabi-Klein theory), 10 (Type 1 string), 11 (M-theory) or even 26 (Bosonic model)

M. Kaku, *Introduction to Supersting and M-Theory*, 2nd Ed., Springer-Verlag, New York, 1999.

☞ 多模态系统: 发电机

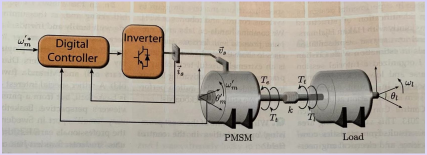


图 **3:** Stand Alone System

单机系统有2, 3, 5, 6, 甚至7 维动力学模型.

J. Machowski, J.W. Bialek, J.R. Bumby, *Power System Dynamics and Stability*, John Wiley and Sons, Inc., Chichester, 1997.

☞ $\mathbb{R}^\infty$ 的向量空间结构

Definition 3.1

(i) 设$x \in \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^\infty$, $r \in \mathbb{R}$. 则向量的数量积定义为:

$$r \times x := rx \in \mathbb{R}^m. \tag{26}$$

(ii) 设$x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, $t = \mathrm{lcm}(m, n)$ 为m 与n 的最小公倍数. 则x 与y 的和为:

$$x \vec{\vdash} y := (x \otimes \mathbf{1}_{t/m}) + (y \otimes \mathbf{1}_{t/n}) \in \mathbb{R}^t, \tag{27}$$

这里,

$$\mathbf{1}_k := [\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{k}]^T$$

为k 维1 向量.

Definition 3.1(cont'd)

相应地, y 与x 的减法定义为:

$$x \overrightarrow{\vdash} y := x \overrightarrow{|\!+} (-y). \tag{28}$$

Proposition 3.2

$\mathcal{V} = \mathbb{R}^\infty$ 以及数乘(26) 及加(减)法(27) ((28)) 为一个伪向量空间. [a]

---

[a] 伪向量空间满足向量空间的所有要求, 除每个x 的逆不唯一外.[1]

[1] R. Abraham, J.E. Marden, *Foundations of Mechanics*, 2nd Ed., Benjamin/Cummings Pub., London, 1978.

Remark 3.3

(i) 事实上, 在$\mathcal{V} = \mathbb{R}^\infty$ 中"零"元素不唯一:

$$\mathbf{0} := \{\underbrace{[0, 0, \cdots, 0]}_{n}^T \mid n = 1, 2, \cdots\}.$$

因此, 设 $x \in \mathbb{R}^n$, 则 $-x \in \mathbb{R}^\infty$ 满足

$$x \overrightarrow{+} (-x) \in \mathbf{0}. \tag{29}$$

(ii) 作为记号, 当$x \in \mathbb{R}^n$ 时, 选$-x \in \mathbb{R}^n$. 其实, 这只是一个代表元.

☞ 向量的等价性

Definition 3.4

$x,\ y \in \mathbb{R}^\infty$ 称为等价的, 记着$x \leftrightarrow y$, 如果存在$\mathbf{1}_\alpha$ 和 $\mathbf{1}_\beta$, 使得

$$x \otimes \mathbf{1}_\alpha = y \otimes \mathbf{1}_\beta.$$

Proposition 3.5

设$x,\ y \in \mathbb{R}^\infty$. $x \leftrightarrow y$, 当且仅当, $x - y = 0$. 即,

$$x \leftrightarrow y \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{0}. \tag{30}$$

☞ $\mathbb{R}^\infty$ 的内积, 模, 与距离

Definition 3.6

设$x \in \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^\infty$, $y \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^\infty$, $t = m \vee n$. 则x 与y 的内积定义为

$$\langle x\ ,\ y\rangle_{\mathcal{V}} := \frac{1}{t}\left\langle x \otimes \mathbf{1}_{t/m}\ ,\ y \otimes \mathbf{1}_{t/n}\right\rangle, \tag{31}$$

这里 $\langle \cdot\ ,\ \cdot\rangle$ 为$\mathbb{R}^t$ 上的普通内积. 即设u, $v \in \mathbb{R}^t$, 则

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{t} u_i v_i.$$

由(31) 定义的内积称加权内积, $1/t$ 为加权.

Remark 3.6

$\mathbb{R}^\infty$ 应满足如下条件:

(i) (分配律)

$$< x+y, z > = < x, z > + < y, z >, \quad x, y, z \in V. \tag{32}$$

(ii) (对称性)

$$< x, y > = < y, x >, \quad x, y \in V. \tag{33}$$

(iii) (线性性)

$$< ax, y > = a < x, y >, \quad a \in \mathbb{R},\ x, y \in V. \tag{34}$$

(iv) (非负性)

$$< x, x > \geq 0,\ 及,\ < x, x > = 0 \Rightarrow x = 0. \tag{35}$$

Remark 3.6(cont'd)

由于$\mathcal{V} = \mathbb{R}^\infty$ 是伪向量空间,

$$< x, x >= 0 \Rightarrow x = 0$$

被替代为

$$< x, x >_{\mathcal{V}}= 0 \Rightarrow x \in \mathbf{0}.$$

因此,由(31) 称为伪内积.

Definition 3.7

$x \in \mathbb{R}^\infty$ 的范数定义为

$$\|x\|_{\mathcal{V}} := \sqrt{\langle x\ ,\ x\rangle_{\mathcal{V}}}. \tag{36}$$

Remark 3.8

$\mathbb{R}^\infty$ 上的范数应满足如下条件:

(i) (三角不等式)

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in V. \tag{37}$$

(ii) (线性性)

$$\|ax\| = |a|\|x\|, \quad a \in \mathbb{R},\ x \in V. \tag{38}$$

(iii) (非负性)

$$\|x\| \geq 0,\ \text{且}, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0. \tag{39}$$

Remark 3.8(cont'd)

由式(36) 定义的范数满足上述要求, 除以下条件:

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

它被替代为

$$\|x\|_{\mathcal{V}} = 0 \Rightarrow x \in \mathbf{0}.$$

因此它也称为伪范数.

Definition 3.9

设$x,\ y \in \mathbb{R}^{\infty}$. 则$x$ 与y 的距离为

$$d_{\mathcal{V}}(x,y) := \|x \vec{\vdash} y\|_{\mathcal{V}}. \tag{40}$$

Remark 3.10

空间X 的距离, 记为$d : X \times X \to \mathbb{R}$, 应满足应满足以下条件:

(i) (三角不等式)

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z), \quad x,y,z \in X. \tag{41}$$

(ii) (对称性)

$$d(x,y) = d(y,x), \quad x,y \in X. \tag{42}$$

(iii) (非负性)

$$d(x,y) \ge 0, \text{ 且 } d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y. \tag{43}$$

Remark 3.10(cont'd)

由(40) 定义的距离满足除以下这个条件外的所有要求:

$$d(x,y)=0\Rightarrow x=y$$

应替换为

$$d_V(x,y)=0\Rightarrow x\leftrightarrow y.$$

因此, 这个距离也称为伪矩离.

(iv) (向量空间距离的平移不变性)

$$d(x+z,y+z)=d(x,y)\quad ,x,y,z\in X. \tag{44}$$

不难验证, 由(40) 定义的距离满足(44).

IV. 线性半群系统

☞ 半群(S-) 系统

Definition 4.1 [1]

(i) 给定一个半群G 和一个集合X. 如果存在一个映射π : $G \times X \to X$, 满足

$$\pi(a, (\pi(b, x)) = \pi(a * b, x), \quad a, b \in G, \ x \in X. \tag{45}$$

那么(G, π, X) 就称为一个S_0-系统.

(ii) 如果(45)中, G 为幺半群(有单位元$e \in G$), 且

$$\pi(e, x) = x, \quad \forall x \in X, \tag{46}$$

那么(G, π, X) 称为一个S-系统.

[1] 刘仲奎, 乔虎生, 半群的S-系理论, 再版, 北京: 科学出版社, 2008.

Remark 4.2

简写

$$\pi(g,x) := gx, \quad g \in G, x \in X.$$

那么, 一个离散时间S_0 (S) 系统可写为

$$x(t+1) = g(t)x(t), \quad x(0) = x_0.$$

Example 4.3

(i) 离散时间线性系统

$$x(t+1) = A(t)x(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n. \tag{47}$$

$G = (\mathcal{M}_{n\times n}, \times)$, $X = \mathbb{R}^n$, $\pi : G \times X \to X$ 普通矩阵乘法. 那么，(47) 为一个半群(S-)系统.

Example 4.3(cont'd)

(ii) 考察连续时间线性系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n. \tag{48}$$

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

$G = \left(e^{At} \mid t \geq 0\right)$, $X = \mathbb{R}^n$, 那么，(48) 为一个半群(S-)系统.

(iii) 考察连续时间非线性系统

$$\dot{x}(t) = f(t), \quad x(t) \in M, \tag{49}$$

这里M 是一个n 维流形.

$$x(t) = \Phi_t^f(x_0).$$

$G = \left(\Phi_t^f \mid t \geq 0\right)$, $X = M$, 那么，(49) 为一个半群(S-)系统.

☞ 泛维矩阵的半群结构

考察

$$\mathcal{M} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{m\times n}.$$

Proposition 4.4

(i) $\Gamma = \{I_n \mid n = 1, 2, \cdots\}$:

$$(\mathcal{M}, \ltimes), \quad (\mathcal{M}, \rtimes)$$

为幺半群.

(ii) $\Gamma = \{J_n \mid n = 1, 2, \cdots\}$:

$$(\mathcal{M}, \circ_\ell), \quad (\mathcal{M}, \circ_r)$$

为半群.

☞ MV-1, MV-2 STP: $\mathcal{M}$ 作用于$\mathbb{R}^\infty$

考察

$$\mathcal{V} = \mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n.$$

设$A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^r \subset \mathbb{R}^\infty$, $t = n \vee r$. 则

$$\begin{array}{ll}
LMV-1: & M \vec{\ltimes} x := \left(M \otimes I_{t/n}\right)\left(x \otimes \mathbf{1}_{t/r}\right); \\
RMV-1: & M \vec{\rtimes} x := \left(I_{t/n} \otimes M\right)\left(\mathbf{1}_{t/r} \otimes x\right); \\
LMV-2: & M \vec{\circ}_\ell x := \left(M \otimes J_{t/n}\right)\left(x \otimes \mathbf{1}_{t/r}\right); \\
RMV-2: & M \vec{\circ}_r x := \left(J_{t/n} \otimes M\right)\left(\mathbf{1}_{t/r} \otimes x\right).
\end{array}$$

这里

$$\mathbf{1}_n := (\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n})^T; \quad J_n = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

☞ Γ 与γ 的相容性

Definition 4.5

设$\Gamma = \{\Gamma_n \mid n = 1, 2, \cdots\}$ 为矩阵乘子, $\gamma = \{\gamma_n \mid n = 1, 2, \cdots\}$ 为向量乘子. Γ 与γ 相容, 如果

$$\Gamma_n \gamma_n = \gamma_n, \quad n = 1, 2, \cdots . \tag{50}$$

Proposition 4.6

如果Γ 与γ 相容, 则

$$A \vec{\times}_{\gamma} \left(B \vec{\times}_{\gamma} x\right) = (A \times_{\Gamma} B) \vec{\times}_{\gamma} x, \quad A, B \in \mathcal{M},\ x \in \mathbb{R}^{\infty}. \tag{51}$$

☞ 线性泛维S- (S_0-) 系统

Proposition 4.7

(i) 设$G=(\mathcal{M},\ltimes)$ (或$G=(\mathcal{M},\rtimes)$), $X=\mathbb{R}^\infty$, $\pi=\vec{\ltimes}$ (或, $\pi=\vec{\rtimes}$). 则(G,π,X) 是一个S-系统.

(ii) 设$G=(\mathcal{M},\circ_\ell)$ (或$G=(\mathcal{M},\circ_r)$), $X=\mathbb{R}^\infty$, $\pi=\vec{\circ}_\ell$ (或, $\pi=\vec{\circ}_r$). 则(G,π,X) 是一个S_0-系统.

Remark 4.8

设G 为半群, 且(G,π,X) 为S_0 系统. 将G 扩充为$\tilde{G}:=G\bigcup\{e\}$, 并定义

$$g*e=e*g=g,\quad \forall g\in G,$$

且

$$\pi(e,x)=x,\quad \forall x\in X.$$

则$(\tilde{G},\pi,X)$ 为一S 系统.

V. 从S-系统到S-动态系统

☞ S-动态系统

Definition 5.1 ([1])

设(G, π, X) 为一S-系统. 如果X 为一拓扑空间, 并且对每一个$g \in G$,

$$\pi(g, \cdot) : X \to X$$

是连续的, 则(G, π, X) 称为一个动态系统.

[1] S. Koppelberg, *Ultrafilters, Semigroups, and Topology*, Lecture Notes, Freie University Berlia, Chapter 9, 1975.

☞ 线性泛维动态系统

下面只考虑

$$\left((\mathcal{M},\ltimes),\vec{\ltimes},(\mathbb{R}^\infty,\mathbf{D})\right)$$

Definition 5.2

设$A\in\mathcal{M}$, $x\in\mathbb{R}^\infty$. A 的范数定义为

$$\|A\|_{\mathcal{O}}:=\sup_{0\neq x\in\mathbb{R}^\infty}\frac{\|A\vec{\ltimes}x\|_{\mathcal{V}}}{\|x\|_{\mathcal{V}}}.$$

Remark 5.3

(i)

$$\|x\|_{\mathcal{V}};=\sqrt{\langle x,x\rangle_{\mathcal{V}}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

(ii) 如果$\|A\|_{\mathcal{O}}<\infty$, 那么, $\|Ax\|_{\mathcal{V}}\leq\|A\|_{\mathcal{O}}\|x\|_{\mathcal{V}}$. 因此, $x\to x_0\Rightarrow Ax\to Ax_0$. 于是有$\left((\mathcal{M},\ltimes),\vec{\ltimes},(\mathbb{R}^\infty,\mathbf{D})\right)$ 是一个动态系统.

Proposition 5.4

设$A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. 则

$$\|A\|_{\mathcal{O}} = \sqrt{\frac{n}{m}\sigma_{\max}(A^T A)}. \tag{52}$$

Proposition 5.5

(i) 设$A \in \mathcal{M}$, $r \in \mathbb{R}$. 则

$$\|rA\|_{\mathcal{O}} = |r|\|A\|_{\mathcal{O}}. \tag{53}$$

(ii) 设$A, B \in \mathcal{M}$. 则

$$\|AB\|_{\mathcal{O}} \le \|A\|_{\mathcal{O}}\|B\|_{\mathcal{O}}. \tag{54}$$

(iii) 设$A, B \in \mathcal{M}_{\mu}$. 则

$$\|A \vdash\!\!+ B\|_{\mathcal{O}} \le \|A\|_{\mathcal{O}} + \|B\|_{\mathcal{O}}. \tag{55}$$

☞ 商空间

- 等价矩阵: $M,\ N \in \mathcal{M}$ $M \sim N$, 如果存在I_α, I_β 使得

$$M \otimes I_\alpha = N \otimes I_\beta. \tag{56}$$

- 等价向量: $x,\ y \in \mathbb{R}^\infty$ $x \leftrightarrow y$, 如果存在$\mathbf{1}_\alpha$, $\mathbf{1}_\beta$ 使得

$$x \otimes \mathbf{1}_\alpha = y \otimes \mathbf{1}_\beta. \tag{57}$$

- 矩阵的商空间:

$$\Sigma := \mathcal{M}/\sim$$

$$\langle A \rangle := \{X \in \mathcal{M} \mid X \sim A\} \in \Sigma.$$

- 向量的商空间:

$$\Omega := \mathbb{R}^\infty/\leftrightarrow \subset \ell_2!$$

$$\bar{x} := \{y \in \mathbb{R}^\infty \mid y \leftrightarrow x\} \in \mathbb{R}^\infty.$$

☞ 商空间上的线性动态系统

Definition 5.6

设$\langle A\rangle \in \Sigma$, $\bar{x}\in\Omega$. 定义

$$\langle A\rangle \vec{\ltimes}\, \bar{x} := \overline{A \vec{\ltimes}\, x}. \tag{58}$$

Proposition 5.7

令 $\phi(\langle A\rangle, \bar{x}) := \langle A\rangle \vec{\ltimes}\, \bar{x}$. 则

$$(\Sigma,\phi,\Omega): \quad \dot{\bar{x}} = \langle A\rangle \vec{\ltimes}\, \bar{x} \tag{59}$$

是一个半群动态系统.

[1] D. Cheng, *From Dimension-Free Matrix Theory to Cross-Dimensional Dynamic Systems*, Elsevier, London, 2019.

VI. 结论

☞ 矩阵半张量积的本质

- 多线性映射的矩阵方法;
- 有限值集合及映射的矩阵表示;
- 泛维动态系统的表示.

☞ 矩阵半张量积的展望

- 有限泛代数上的网络的分析与控制;
- 信息物理系统的决策与控制→ 人工智能;
- 泛维动态系统的控制理论.

谢　谢　！

Q&A