

逻辑动态系统

钟杰

数学科学学院，浙江师范大学
Email: jiezhong0615math@zjnu.edu.cn

2023 年 8 月 12 日

① 基础知识

② 进阶导读

① 基础知识

布尔网络的结构分析

布尔控制网络的能控性

② 进阶导读

布尔网络的代数表示

一个布尔网络可以用一个网络图来刻画. 网络中的每一个节点在每一时刻可以取一个逻辑值, 即 0 或者 1. 每一条输入边表示另一个节点对它的作用. 而一个节点的演化值则由这些作用组成的一个逻辑函数来确定. 我们考虑一个具有四个节点的布尔网络.

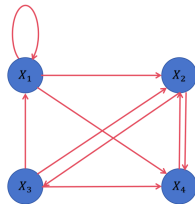


图 1: 布尔网络结构图

节点 $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathcal{D} = \{0, 1\}$ 在每个时刻 t 可取不同的逻辑值. 每个节点在 $t + 1$ 时刻的值是它的领域节点在 t 时刻的值的逻辑函数.

布尔网络的代数表示

然而, 仅靠网络图不足以确定一个布尔网络, 我们还需要将网络的逻辑动态过程用逻辑函数表出. 例如, 上述该布尔网络的动态方程表示为:

$$\begin{cases} X_1(t+1) = X_1(t) \wedge \neg X_3(t), \\ X_2(t+1) = (X_1(t) \vee X_3(t)) \wedge \neg X_4(t), \\ X_3(t+1) = X_2(t), \\ X_4(t+1) = \neg X_1(t) \wedge (X_2(t) \vee X_3(t)). \end{cases} \tag{1}$$

一般而言, n 个节点的布尔网络的动力学演化方程可以表示为

$$X_i(t+1) = f_i(X_1(t), \cdots, X_n(t)), i = 1, 2, \cdots, n \tag{2}$$

注

可以发现布尔网络(1)中的节点 X_1 只与节点 X_1 和 X_3 有关, 事实上, 任一节点的演化通常只与部分节点有关.

$$\neg x = \neg \vec{X} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x := M_n x.$$

若 $\oplus$ 为二元逻辑算子, 则存在唯一逻辑矩阵 $M_{\oplus} \in \mathcal{L}_{2 \times 4}$, 使得

$$x \oplus y = M_{\oplus} xy, \quad x, y \in \Delta_2. \quad (4)$$

表 1: 逻辑算子及其结构矩阵

名称	符号	矩阵记号	结构矩阵
非	$\neg$	M_n	$\delta_2[2, 1]$
合取	$\wedge$	M_c	$\delta_2[1, 2, 2, 2]$
析取	$\vee$	M_d	$\delta_2[1, 1, 1, 2]$
蕴涵	$\rightarrow$	M_i	$\delta_2[1, 2, 1, 1]$
等价	$\leftrightarrow$	M_e	$\delta_2[1, 2, 2, 1]$
异或	∇	M_p	$\delta_2[2, 1, 1, 2]$

定理 2

设 $x_i \in \Delta_2$, $i = 1, 2, \dots, n$. $x = \times_{i=1}^n x_i$. 则

$$x_i = [\mathbf{1}_{2^{i-1}}^\top \otimes I_2 \otimes \mathbf{1}_{2^{n-i}}^\top] x. \quad (5)$$

根据以上命题, 我们得到下面结论, 这对于网络演化的代数表示是很重要的.

定理 3

(i) 设 $x_i \in \Delta_2$, $i = 1, 2, \dots, n$, $J = \{j_1, j_2, \dots, j_s\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$, 则

$$\times_{r=1}^s x_{j_r} = (S_1 \otimes S_2 \otimes \dots \otimes S_n) x, \quad (6)$$

这里

$$S_i = \begin{cases} I_2, & i \in J, \\ \mathbf{1}_2^\top, & i \notin J. \end{cases}$$

(ii) 若 x_i 是概率向量, (6) 仍然成立.

定理 4

设 $f(X_1, \dots, X_n) : \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$ 为一 n 元布尔函数, 则存在唯一的逻辑矩阵 $M_f \in \mathcal{L}_{2 \times 2^n}$, 称为 f 的结构矩阵, 使得

$$\delta_2^{2-f(X_1, X_2, \dots, X_n)} = M_f \bowtie_{i=1}^n x_i, \quad (7)$$

这里 $x_i = \delta_2^{2-X_i}, i = 1, 2, \dots, n, \bowtie_{i=1}^n x_i = x_1 \bowtie x_2 \bowtie \dots \bowtie x_n$.

令 $x_i = \vec{X}_i, i = 1, 2, \dots, n$. 于是, $X_i(t+1) = f_i(X_1(t), \dots, X_n(t))$ 可以表示为

$$x_i(t+1) = M_i x(t), i = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

这里, $M_i \in \mathcal{L}_{2 \times 2^n}$ 是 f_i 的结构矩阵, $i = 1, 2, \dots, n$,

$$x(t) = \bowtie_{i=1}^n x_i(t).$$

式(8)称为 $X_i(t+1) = f_i(X_1(t), \dots, X_n(t))$ 的分量代数状态空间表示.

当然, 对于 $X_i(t+1) = f'_i([X_j(t)]_{j \in N_i})$ 也可以得到其分量代数状态空间表示.

$$x_i(t+1) = A_i \times_{j \in \mathbb{N}_i} x_j(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (9)$$

其中, $\mathbb{N}_i$ 为节点 X_i 所有邻居的集合, $A_i \in \mathcal{L}_{2 \times 2^{|\mathbb{N}_i|}}$ 为函数 $f'_i: \mathcal{D}^{|\mathbb{N}_i|} \rightarrow \mathcal{D}$ 的结构矩阵. 假设 $\mathbb{N}_i = \{b_1^i, \dots, b_{|\mathbb{N}_i|}^i\}$, 且 $1 \leq b_1^i < b_2^i < \dots < b_{|\mathbb{N}_i|}^i \leq n$, 为确保结构矩阵 A_i 的唯一性, 我们规定 $\times_{j \in \mathbb{N}_i} x_j(t) = x_{b_1^i}(t) \times x_{b_2^i}(t) \times \dots \times x_{b_{|\mathbb{N}_i|}^i}(t)$.

值得注意的是, (9)与(8)之间可以相互转化.

定义 3

设 $A \in \mathcal{M}_{p \times n}$, $B \in \mathcal{M}_{q \times n}$, 则其 *Khatri-Rao* 积, 记作 $A * B$, 定义为

$$A * B := [Col_1(A) \rtimes Col_1(B), \dots, Col_n(A) \rtimes Col_n(B)]. \quad (10)$$

定理 5

记 $x(t) = \times_{i=1}^n x_i(t)$, 则(2)可以表示为

$$\mathbf{x}(t+1) = M\mathbf{x}(t), \quad (11)$$

这里 $M = \ast_{i=1}^n M_i \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^n}$ 称为(2)的状态转移矩阵.

不动点和极限环

定义 4

- ① 状态 $X^* \in \mathcal{D}^n$ 称为布尔网络(2)的**不动点**, 如果由 $X(t) = X^*$ 可得 $X(t+1) = X^*$.
- ② $(X_0^*, X_1^*, \dots, X_{p-1}^*)$ 称为布尔网络(2)的长度为 p 的**极限环**, 如果 $X_i^* \neq X_j^*, 0 \leq i \neq j \leq p-1$, 且由 $X(t) = X_0^*$ 可得 $X(t+i) = X_k^*, k = i \bmod p$.
- ③ 不动点和极限环统称为吸引子.

定义 5

- ① 状态 $x^* \in \Delta_{2^n}$ 称为布尔网络(11)的**不动点**, 若 $x^* = Mx^*$.
- ② $\{\delta_{2^n}^{r_0}, \delta_{2^n}^{r_1}, \dots, \delta_{2^n}^{r_{p-1}}\} \subseteq \Delta_{2^n}$, 称为布尔网络(11)长度为 p 的**极限环**, 若 $r_i \neq r_j, 0 \leq i \neq j \leq p-1$, 由 $x(t) = \delta_{2^n}^{r_0}$ 可得 $x(t+i) = \delta_{2^n}^{r_k}, k = i \bmod p$.

吸引子的计算

定理 6

考虑布尔网络(2)及代数状态空间表示 $x(t+1) = Mx(t)$, 不动点个数 N_e 为

$$N_e = \text{tr}(M).$$

定理 7

记长度为 s 的极限环个数为 N_s , 则 N_s 可以由下列递推公式计算得到

$$\begin{cases} N_1 = N_e, \\ N_s = \frac{\text{tr}(M^s) - \sum_{\kappa \in \mathcal{P}(s)} \kappa N_\kappa}{s}, \quad 2 \leq s \leq 2^n. \end{cases} \quad (12)$$

这里 $\mathcal{P}(s)$ 为 s 的真因子集合.

注

由 $x(t+1) = Mx(t)$ 可得 $x(t) = M^t x(0)$.

- 所有吸引子构成的集合称为**极限集**, 记作 Ω .
- 由于布尔网络的节点数是有限的, 因此所有状态都会在有限步之后进入极限集, 称所有状态进入极限集的最小步数为**过渡周期**, 记作 T_t .
- 对于一个给定的状态 x_0 , 它进入极限集的最短时间称为它的过渡周期, 记作 $T_t(x_0)$, 显然, $T_t = \max_{\forall x \in \Delta_{2^n}} (T_t(x))$.

考虑以下矩阵序列

$$M, M^2, \dots, M^r,$$

其中 $r = (2^n)^{2^n} + 1$, 由于 M 至多只有 $(2^n)^{2^n}$ 种可能性, 因此该矩阵序列中必有两个矩阵相等. 令 $r_0 < r$ 为使得 M^i 在序列中重现的最小的 i . 于是, 存在 $k > i$ 使得 $M^i = M^k$. 准确地说,

$$r_0 = \arg \min_{1 \leq i < r} \{M^i \in \{M^{i+1}, M^{i+2}, \dots, M^r\}\}. \tag{13}$$

定理 8

式(13)中的 r_0 就是系统(11)的过渡周期. 即 $T_r = r_0$.

吸引域

事实上, 布尔网络的状态集可以分为两类:

- ① 吸引子中的状态 $x \in \Omega$, 它们永远属于固定的吸引子;
- ② 吸引子之外的状态 $x \in \Delta_{2^n} \setminus \Omega$, 每个状态都会收敛到某个吸引子.

收敛到某个吸引子的状态的集合称为这个吸引子的吸引域. 记

$$\Omega := \bigcup_{i=1}^k C_i,$$

这里 $\{C_i | i = 1, 2, \dots, k\}$ 为吸引子. 每个吸引子都有属于自己的吸引域, 且吸引域之间两两不相交.

定义 6

$S_i \subset \Delta_{2^n}$ 称为吸引子 $C_i \in \Omega$ 的吸引域, 如果从 S_i 出发的轨线都会收敛到 C_i , 同时, 收敛到 C_i 的初始状态都在 S_i 中.

注意到, $\{S_i | i = 1, \dots, k\}$ 是互不相交的, 因此它们构成了状态空间 Δ_{2^n} 的一个分割, 满足 $\Delta_{2^n} = \bigcup_{i=1}^k S_i$.

设 $p \in \Delta_{2^n}$, $C \subset \Delta_{2^n}$, 令

$$\begin{aligned} M^{-1}(p) &:= \{q | Mq = p\}, \quad M^{-r}(p) := \{q | M^r q = p\}, \\ M^{-1}(C) &:= \{q | Mq \in C\}, \quad M^{-r}(C) := \{q | M^r q \in C\}. \end{aligned}$$

定理 9

$$S_i = C_i \cup M^{-1}(C_i) \cup M^{-2}(C_i) \cup \dots \cup M^{-T_t}(C_i). \quad (14)$$

给定 $p \in C_i$, 下面命题给出如何寻找 $M^{-r}(p)$, $r = 1, \dots, T_t$.

定理 10

$$\begin{cases} M^{-1}(p) = \{\delta_{2^n}^j | Col_j(M) = p\}, \\ M^{-r}(p) = \{\delta_{2^n}^j | Col_j(M^r) = p\}, \quad r = 2, \dots, T_t. \end{cases} \quad (15)$$

注

由 $x(t+1) = Mx(t)$ 可得 $x(t) = M^t x(0)$.

例 2

给定布尔网络

$$\begin{cases} X_1(t+1) = X_2(t) \wedge X_3(t), \\ X_2(t+1) = \neg X_1(t), \\ X_3(t+1) = X_2(t) \vee X_3(t). \end{cases} \quad (16)$$

则代数表达式为

$$x(t+1) = Mx(t), \quad (17)$$

$M = \delta_8[3, 7, 7, 8, 1, 5, 5, 6]$, $r_0 = 3$, $M^3 = M^7$, 则过渡周期为 $T_t = 3$.

显然, $tr(M^t) = 0$, $t \leq 3$, $tr(M^4) = 4$, 且 $N_4 = 1$, 由定理7, 该系统只有一个长度为 4 的极限环, 又由

$$M^4 = \delta_8[1, 3, 3, 1, 5, 7, 7, 3], \quad (18)$$

可知 $M^4 \delta_8^i = \delta_8^i$, $i = 1, 3, 5, 7$, 所以, 极限环为 $\{\delta_8^1, \delta_8^3, \delta_8^5, \delta_8^7\}$. 给定 δ_8^5 , 可得 $\text{Col}_6(M) = \text{Col}_7(M) = \delta_8^5$, 因此 $M^{-1}(\delta_8^5) = \{\delta_8^6, \delta_8^7\}$, 类似地, 可以得到

$$M^{-2}(\delta_8^5) = \{\delta_8^2, \delta_8^3, \delta_8^8\}, \quad (19)$$

$$M^{-3}(\delta_8^5) = \{\delta_8^1, \delta_8^4\}. \quad (20)$$

① 基础知识

布尔网络的结构分析

布尔控制网络的能控性

② 进阶导读

布尔控制网络的代数状态空间表示

与布尔网络类似, 布尔控制网络也可用网络图来表示. 不同的是, 在布尔控制网络的网络图中存在输入和输出节点. 例如, 图2为一布尔控制网络的结构图.

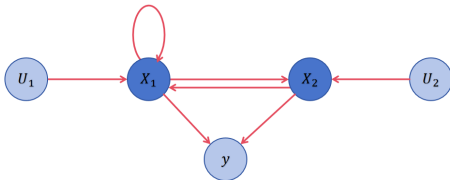


图 2: 布尔控制网络结构图

同样地, 网络图不能完全反映布尔控制网络的所有信息, 节点间的逻辑关系仍需要一个动态方程来刻画. 例如, 一个网络动态系统为

$$\begin{cases} X_1(t+1) = (X_1(t) \leftrightarrow X_2(t)) \vee U_1(t), \\ X_2(t+1) = \neg X_1(t) \wedge U_2(t), \end{cases} \quad (21a)$$

$$Y(t) = X_1(t) \vee (\neg X_2(t)). \quad (21b)$$

$$Y_k(t) = h_k(X_1(t), \dots, X_n(t)), \quad k = 1, \dots, p. \quad (22b)$$

$$y_k(t) = H_k x(t), \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (23b)$$

$$y(t) = Hx(t), \quad (24b)$$

布尔控制网络的能控性

考虑布尔控制网络(22a):

$$X_i(t+1) = f_i(X_1(t), \dots, X_n(t), U_1(t), \dots, U_m(t)), i = 1, \dots, n.$$

定义 7

设状态 $X^0, X^d \in \mathcal{D}^n$.

- (i) 称系统(22a)可以从 X^0 控制到 X^d , 如果存在 $0 < T < \infty$, 以及一个控制序列 $\{U(0), U(1), \dots, U(T-1)\}$, 使得系统(22a)在该控制序列下, 其轨线能从 $X(0) = X^0$ 到 $X(T) = X^d$.
- (ii) 称系统(22a)在 X^0 能控, 如果对任何 $X \in \mathcal{D}^n$, X^0 到 X 均能控.
- (iii) 称系统(22a)到 X^d 可达, 如果对任何 $X \in \mathcal{D}^n$, X 到 X^d 均能控.
- (iv) 称系统(22a) **(完全) 能控**, 如果对任何 $X^1, X^2 \in \mathcal{D}^n$, X^1 到 X^2 均能控.

定义 8

(i) 设 $a, b \in \mathcal{D}$, 则

$$a +_{\mathcal{B}} b = a \vee b, \tag{25}$$

$$a \times_{\mathcal{B}} b = a \wedge b \tag{26}$$

(ii) 设 $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{B}_{m \times s}, B = (b_{i,j}) \in \mathcal{B}_{s \times n}, C = (c_{i,j}) \in \mathcal{B}_{m \times n}$, 则

$$A \times_{\mathcal{B}} B = C, \tag{27}$$

这里

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^s {}_{\mathcal{B}} a_{i,k} \times_{\mathcal{B}} b_{k,j}. \tag{28}$$

(iii)

$$A^{(k)} = \underbrace{A \times_{\mathcal{B}} A \times_{\mathcal{B}} \cdots \times_{\mathcal{B}} A}_k. \tag{29}$$

回顾 $x(t+1) = Mu(t)x(t)$, 定义

$$T := \sum_{i=1}^{2^m} \mathcal{B} M \delta_{2^m}^i. \quad (30)$$

称 $T \in \mathcal{B}_{2^n \times 2^n}$ 为系统的状态转移矩阵. 进一步定义系统的能控性矩阵如下:

$$\mathcal{C} := \sum_{i=1}^{2^n} \mathcal{B} T^{(i)}. \quad (31)$$

定理 11

考虑布尔控制网络(22a)及代数状态空间表达式 $x(t+1) = Mu(t)x(t)$. 设状态 $X^0, X^d \in \mathcal{D}^n$, $x^0 = \vec{X}^0 = \delta_{2^n}^j$, $x^d = \vec{X}^d = \delta_{2^n}^i$, 能控性矩阵为 $C = (c_{i,j})$.

- (i) 系统(22a)可以从 X^0 控制到 X^d , 当且仅当, $c_{i,j} = 1$.
- (ii) 系统(22a)在 X^0 可控, 当且仅当, $Col_j(C) = \mathbf{1}_{2^n}$.
- (iii) 系统(22a)到 X^d 可达, 当且仅当, $Row_i(C) = \mathbf{1}_{2^n}^\top$.
- (iv) 系统(22a)可控, 当且仅当, $C = \mathbf{1}_{2^n \times 2^n}$.

回顾布尔控制网络(21).

$$\begin{cases} X_1(t+1) = (X_1(t) \leftrightarrow X_2(t)) \vee U_1(t), \\ X_2(t+1) = \neg X_1(t) \wedge U_2(t). \end{cases} \quad (32)$$

可以得到其分量代数状态空间表达式为

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \delta_2[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1]u(t)x(t), \\ x_2(t+1) = \delta_2[2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2]u(t)x(t). \end{cases} \quad (33)$$

从而,代数状态空间表达式为

$$x(t+1) = \delta_2[2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 4, 2]u(t)x(t). \quad (34)$$

直接计算得

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

进而可得

$$\mathcal{C} = \sum_{i=1}^4 \mathcal{B}^{T(i)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

由定理11可得, 该布尔控制网络仅在 δ_4^3 可控, 到 $\delta_4^1, \delta_4^2, \delta_4^4$ 可达, 且系统不可控.

① 基础知识

② 进阶导读

布尔控制网络的集合能控性

稳定性与镇定性

牵制控制

$$\mathcal{C}_S := J_d^\top \times_B \mathcal{C} \times_B J_0 \in \mathcal{B}_{\beta \times \alpha}, \quad \mathcal{C} \text{ 是原系统的能控性矩阵.} \quad (40)$$

定理 12

- (i) 系统(22a)从 s_j^0 到 s_i^d 集合能控, 当且仅当, $r_{i,j} = 1$.
- (ii) 系统(22a)在 s_j^0 集合能控, 当且仅当, $Col_j(C_S) = \mathbf{1}_\beta$.
- (iii) 系统(22a)到 s_i^d 集合能达, 当且仅当, $Row_i(C_S) = \mathbf{1}_\alpha^\top$.
- (iv) 系统(22a)从 P^0 到 P^d 完全集合能控, 当且仅当, $C_S = \mathbf{1}_{\beta \times \alpha}$.

① 基础知识

② 进阶导读

布尔控制网络的集合能控性

稳定性与镇定性

牵制控制

考虑系统

$$x(t+1) = Mx(t),$$

定义 10

如果系统(11)有且仅有一个唯一的不动点作为吸引子, 则称(11)是全局稳定的. 此外, 给定一个状态 $x^* \in \Delta_{2^n}$, 系统(11)称为全局稳定到 x^* , 若对任一 $x_0 \in \Delta_{2^n}$, 存在 $T(x_0) \in \mathbb{N}$, 满足以下条件成立,

$$x(t; x_0) = x^*, \quad \forall t \geq T(x_0). \quad (41)$$

定理 13

- ① 若系统(11)的网络结构图是无环的, 则(11)是全局稳定的.
- ② 此外, 给定状态 $x^* \in \Delta_{2^n}$, 系统(11)是全局稳定到 x^* 的, 当且仅当, 存在 $T \in \mathbb{N}$, 使得以下等式成立,

$$Col(M^{(k)}) = \{x^*\}, \forall k \geq T.$$

布尔控制网络的镇定性及控制器设计

考虑布尔控制网络 (27a): $x(t+1) = Mu(t)x(t)$.

定义 11

给定一个状态 $x^* \in \Delta_{2^n}$, 系统(24a)称为全局镇定到 x^* , 若对任一 $x_0 \in \Delta_{2^n}$, 存在控制序列 u 以及正整数 $T(x_0, u)$, 满足 $x(t; x_0, u) = x^*, \forall t \geq T(x_0, u)$.

记

$$E_k(r) = \{x_0 : \text{存在 } u(0), \dots, u(k-1), \text{ 使得 } x(k; x_0, u(0), \dots, u(k-1)) = \delta_{2^n}^r\}.$$

- (1) 若 $\delta_{2^n}^r \in E_1(r)$, 则 $E_k(r) \subseteq E_{k+1}(r)$.
- (2) 若 $E_1(r) = \{\delta_{2^n}^r\}$, 则 $E_k(r) = \{\delta_{2^n}^r\}, \forall k \geq 1$.
- (3) 若存在 $j \geq 1$ 使得 $E_{j+1}(r) = E_j(r)$, 则 $E_k(r) = E_j(r), \forall k \geq j$.

定理 14

给定一个状态 $x^* = \delta_{2^n}^r \in \Delta_{2^n}$, 系统(24a)是全局镇定到 x^* 的, 当且仅当, 以下条件成立,

- (i) $\delta_{2^n}^r \in E_1(r)$,
- (ii) 存在一个正整数 $T \leq 2^n - 1$, 使得 $E_T(r) = \Delta_{2^n}$.

① 基础知识

② 进阶导读

布尔控制网络的集合能控性

稳定性与镇定性

牵制控制

基于状态转移矩阵的牵制控制

给定一个布尔网络

$$X_i(t+1) = f_i(X_1(t), \dots, X_n(t)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (46)$$

其分量代数空间表达式为

$$x_i(t+1) = M_i x(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (47)$$

进一步, 我们可以得到(46)的代数表达式为

$$x(t+1) = Mx(t), \quad (48)$$

其中, $M = *_{i=1}^n M_i \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^n}$ 为(46)的状态转移矩阵.

假设(48)不满足全局稳定到 X^* . 在此, 考虑施加如下牵制控制,

$$\begin{cases} X_i(t+1) = U_i(t) \oplus_i f_i(X_1(t), \dots, X_n(t)), & i \in \Xi \\ X_j(t+1) = f_j(X_1(t), \dots, X_n(t)), & j \in [1, 2, \dots, n] \setminus \Xi, \\ U_i(t) = g_i(X_1(t), \dots, X_n(t)). \end{cases} \quad (49)$$

Ξ 为牵制节点集合, $\oplus_i$ 为逻辑算子, $\Xi, \oplus_i, g_i$, 均需要被确定和设计.

令状态反馈控制器 $U_i(t)$ 的代数状态空间表示如下

$$u_i(t) = G_i x(t), \quad G_i \text{ 为 } g_i \text{ 结构矩阵, } i \in \Xi. \tag{50}$$

考虑(49)的分量代数状态空间表示如下

$$\begin{cases} x_i(t+1) &= M_{\oplus_i} u_i(t) M_i x(t), \\ &= M_{\oplus_i} G_i (I_{2^n} \otimes M_i) \Phi_n x(t), \quad i \in \Xi, \\ x_j(t+1) &= M_j x(t), j \in [1, \cdots, n] \setminus \Xi, \end{cases} \tag{51}$$

这里, $M_{\oplus_i} \in \mathcal{L}_{2 \times 4}$ 为逻辑算子 $\oplus_i$ 的结构矩阵.

我们改变(48)的状态转移矩阵 M , 实现系统全局稳定到 $x^* = \delta_{2^n}^r$. 算法如下,

- ① 改变矩阵 M 的第 r 列为 $\delta_{2^n}^r$.
- ② 计算 $\delta_{2^n}^r$ 的吸引域, 记为 $E(\delta_{2^n}^r)$.
- ③ 找到所有满足 $\delta_{2^n}^i \notin E(\delta_{2^n}^r)$, 让 $\text{Col}_i(M)$ 变为 $E(\delta_{2^n}^r)$ 中的某一元素.

- 给出新布尔网络的分量代数状态空间表示如下

$$\begin{cases} x_i(t+1) = M'_i x(t), & i \in \Xi, \\ x_j(t+1) = M_j x(t), & j \in [1, \dots, n] \setminus \Xi. \end{cases} \quad (52)$$

回顾(51), 设计 $M_{\oplus i}, G_i, i \in \Xi$ 的问题转化为求解以下方程组,

$$M_{\oplus i} G_i(I_{2^n} \otimes M_i) \Phi_n = M'_i, \quad i \in \Xi, \quad (53)$$

其中, $M_{\oplus i}, G_i, i \in \Xi$ 未知, 且该方程组已被证明是有解的.

基于网络结构图的分布式牵制控制

利用布尔网络的状态转移矩阵来设计牵制控制器会产生较高的复杂度, 且控制器的设计依赖于所有节点. 因此, 希望设计一种算法能够不依赖状态转移矩阵来设计牵制控制实现系统全局稳定, 且反馈控制器不依赖于所有节点.

回顾布尔网络(3)

$$X_i(t+1) = f'_i([X_j(t)]_{j \in \mathbb{N}_i}), \quad i = 1, \dots, n,$$

其代数表达式为(9),

$$x_i(t+1) = A_i \times_{j \in \mathbb{N}_i} x_j(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

考虑施加牵制控制的布尔网络如下

$$\begin{cases} X_i(t+1) &= U_i(t) \oplus_i f'_i([X_j(t)]_{j \in \mathbb{N}_i}), \quad i \in \Xi \\ X_j(t+1) &= f'_j([X_j(t)]_{j \in \mathbb{N}_i}), \quad j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \Xi, \\ U_i(t) &= k_i([X_j(t)]_{j \in \mathbb{N}_i}), \quad \text{称为分布式状态反馈控制器} \end{cases} \quad (54)$$

Ξ 为牵制节点集合, $\oplus_i$ 为逻辑算子, $\Xi, \oplus_i, k_i, i \in \Xi$, 均需要被确定和设计.

基于网络结构图的分布式牵制控制

令状态反馈控制器 $U_i(t)$ 的代数状态空间表示如下

$$u_i(t) = K_i \ltimes_{j \in \mathbb{N}_i} x_j(t), \quad K_i \text{ 为 } k_i \text{ 的结构矩阵 } i \in \Xi. \quad (55)$$

于是, 可得到系统(54)分量代数状态空间:

$$\begin{cases} x_i(t+1) &= M_{\oplus_i} u_i(t) A_i \ltimes_{j \in \mathbb{N}_i} x_j(t), \\ &= M_{\oplus_i} K_i (I_{2|\mathbb{N}_i|} \otimes A_i) \Phi_{|\mathbb{N}_i|} \ltimes_{j \in \mathbb{N}_i} x_j(t), \quad i \in \Xi, \\ x_j(t+1) &= A_j \ltimes_{j \in \mathbb{N}_i} x_j(t), j \in \{1, \dots, n\} \setminus \Xi, \end{cases} \quad (56)$$

$M_{\oplus_i} \in \mathcal{L}_{2 \times 4}$ 为逻辑算子 $\oplus_i$ 的结构矩阵.

定义 12 (反馈弧集)

给定一个有向图, **反馈弧集**包含了有向图中**每一个环里的至少一条边**. 基数最小的反馈弧集称为**最小反馈弧集**.

回顾定理13, 若结构图无环, 则一定全局稳定, 但不一定稳定到期望状态 x^* . 为实现系统(3)全局稳定到一个给定的状态 $x^* = \delta_{2n}^L$, 依次进行以下操作:

- ① 利用最小反馈弧集, 控制(3)中尽可能少的节点使得网络结构图无环.
- ② 找到需要进一步控制的节点, 并设计控制器使得(3)全局稳定到我们期望的状态 x^* .

不妨设

$$\bigcup_{i=1}^{c_2} O_+(e_i^\zeta) = \{\omega_1, \dots, \omega_{c_1}\}, \quad \omega_1, \dots, \omega_{c_1} \in \mathbf{V}. \quad (57)$$

假设边 $e_{l_1^1}^\zeta, \dots, e_{l_1^{\epsilon_1}}^\zeta$ 的终点均为 $\omega_1, \dots$; 边 $e_{l_{c_1}^1}^\zeta, \dots, e_{l_{c_1}^{\epsilon_{c_1}}}^\zeta$ 的终点均为 ω_{c_1} . 此

外, 假设 $\bigcup_{i=l_1^1}^{l_1^{\epsilon_1}} O_-(e_i^\zeta) = \{\theta_1^1, \dots, \theta_1^{\epsilon_1}\}; \dots; \bigcup_{i=l_{c_1}^1}^{l_{c_1}^{\epsilon_{c_1}}} O_-(e_i^\zeta) = \{\theta_{c_1}^1, \dots, \theta_{c_1}^{\epsilon_{c_1}}\}$, 其中 $\theta_1^1, \dots, \theta_1^{\epsilon_1}, \dots, \theta_{c_1}^1, \dots, \theta_{c_1}^{\epsilon_{c_1}} \in \mathbf{V}$, 且 $\theta_1^1 < \dots < \theta_1^{\epsilon_1}, \dots, \theta_{c_1}^1 < \dots < \theta_{c_1}^{\epsilon_{c_1}}$.

图3给出的是一个布尔网络的网络结构图,

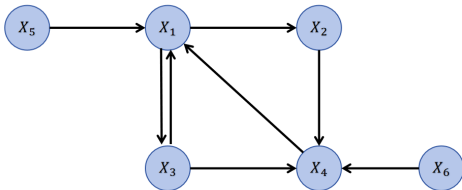


图 3: 布尔网络结构图

我们可以发现 $\{e_{31}, e_{41}\}$ 为一最小反馈弧集, $O_+(e_{31}) \cup O_+(e_{41}) = \{1\}$, 且 $O_-(e_{31}) \cup O_-(e_{41}) = \{3, 4\}$.

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= A_i \mathbf{W}_i \ltimes_{j \in \bar{\mathbb{N}}_i} x_j(t) \ltimes_{j \in \mathbb{N}_i^c} x_j(t) \\ &= \bar{A}_i \ltimes_{j \in \bar{\mathbb{N}}_i} x_j(t) \ltimes_{j \in \mathbb{N}_i^c} x_j(t). \end{aligned}$$
$$u_i(t) = \mathbf{K}_i \bowtie_{j \in \overline{\mathbb{N}}_i} x_j(t) \bowtie_{j \in \mathbb{N}_i^c} x_j(t).$$
$$\begin{cases} x_i(t+1) = M_{\oplus i} \mathbf{K}_i (I_{2N_i} \otimes \bar{A}_i) \Phi_{N_i} \times_{j \in \bar{N}_{\omega_i}} x_j(t) \times_{j \in N_{\omega_i}^c} x_j(t), \\ \quad \quad \quad i \in \{\omega_1, \dots, \omega_{c_1}\}, \\ x_j(t+1) = A_j \times_{j \in N_i} x_j(t), \quad j \in [1, \dots, n] \setminus \{\omega_1, \dots, \omega_{c_1}\}. \end{cases} \quad (58)$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

任意给定矩阵 $\hat{A}_{\omega_1} \in \mathcal{L}_{2 \times 2^{|\bar{\mathbb{N}}_{\omega_1}|}}, \dots, \hat{A}_{\omega_{c_1}} \in \mathcal{L}_{2 \times 2^{|\bar{\mathbb{N}}_{\omega_{c_1}}|}}$, 计算 $\tilde{A}_{\omega_1} \in \mathcal{L}_{2 \times 2^{|\mathbb{N}_{\omega_1}|}}, \dots, \tilde{A}_{\omega_{c_1}} \in \mathcal{L}_{2 \times 2^{|\mathbb{N}_{\omega_{c_1}}|}}$, 满足

$$\tilde{A}_i = \hat{A}_{\omega_i} (I_{2^{|\bar{\mathbf{N}}_i|}} \otimes \mathbf{1}_{2^{|\mathbf{N}_i^c|}})^\top, \quad i = \omega_1, \dots, \omega_{c_1}. \quad (59)$$

计算得到的矩阵 $\tilde{A}_i, i = \omega_1, \dots, \omega_{c_1}$, 对构造无环的网络结构图具有重要作用. 就 x_{ω_1} 而言, 若 $x_{\omega_1}(t+1) = \tilde{A}_{\omega_1} \times_{j \in \bar{N}_{\omega_1}} x_j(t) \times_{j \in N_{\omega_1}^c} x_j(t)$, 则节点 x_1 的代数演化过程可以表示为 $x_{\omega_1}(t+1) = \hat{A}_{\omega_1} \times_{j \in \bar{N}_{\omega_1}} x_j(t)$. 我们发现, 此时节点 $x_{\theta_1^1}, \dots, x_{\theta_1^{\epsilon_1}}$ 对 x_{ω_1} 的作用被删除了, 即图 $\mathbf{G}$ 中的边 $e_{i_1^1}^{\zeta}, \dots, e_{i_1^{\epsilon_1}}^{\zeta}$ 被删除了. 显然地, 若对每一个牵制节点 $x_i, i \in \{\omega_1, \dots, \omega_{c_1}\}$, 其演化过程都可以写成 $x_{\omega_i}(t+1) = \hat{A}_{\omega_i} \times_{j \in \bar{N}_{\omega_i}} x_j(t) \times_{j \in N_{\omega_i}^c} x_j(t)$ 的形式, 则图 $\mathbf{G}$ 是无环的, 从而系统(3)全局稳定.

回顾(58), 设计分布式牵制控制(54)实现(3)全局稳定的问题转化为求解以下方程组,

$$\begin{cases} \tilde{A}_{\omega_1} &= M_{\oplus_{\omega_1}} \mathbf{K}_{\omega_1} (I_{2^{|\mathbb{N}_{\omega_1}|}} \otimes \overline{A}_{\omega_1}) \Phi_{\mathbb{N}_{\omega_1}}, \\ &\dots\dots\dots \\ \tilde{A}_{\omega_{c_1}} &= M_{\oplus_{\omega_{c_1}}} \mathbf{K}_{\omega_{c_1}} (I_{2^{|\mathbb{N}_{\omega_{c_1}|}} \otimes \overline{A}_{\omega_{c_1}}}) \Phi_{\mathbb{N}_{\omega_{c_1}}}. \end{cases} \tag{60}$$

这里, $M_{\oplus_i}, K_i, i = \omega_1, \cdots, \omega_{c_1}$ 是未知的, 且该方程组已被证实是有解的. 目前为止, 我们实现了系统(3)的全局稳定, 为了方便, 我们记 $\hat{A}_i = A_i, \overline{\mathbb{N}}_i = \mathbb{N}_i, i \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{\omega_1, \cdots, \omega_{c_1}\}$, 则施加牵制控制后(3)的分量代数表达式为

$$x_s(t+1) = \hat{A}_s \ltimes_{j \in \overline{\mathbb{N}}_s} x_j(t), s = 1, 2, \cdots, n. \tag{61}$$

显然, 我们仅保证了(3)的全局稳定性, 但并不一定全局稳定到我们期望的状态 x^* , 记为 $x^* = \delta_{2^n}^* = \ltimes_{i=1}^n \delta_2^{f_i} \in \Delta_{2^n}$.

构造如下问题,

$$\begin{aligned} \min \quad & c_3 = \sum_{i=1}^n \xi_i \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \xi_i \in \mathcal{D}, \quad i = 1, \dots, n \\ \check{A}_i \in \mathcal{L}_{2 \times 2^{|\bar{\mathbb{N}}_i|}}, \quad i = 1, \dots, n \\ \delta_2^i = [(1 - \xi_i) \times \hat{A}_i + \xi_i \times \check{A}_i] \ltimes_{j \in \bar{\mathbb{N}}_i} \delta_2^j, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

显然, 在系统(3)实现全局稳定的前提下, c_3 能取到的最小值就是使得(3)全局稳定到 x^* 所需的最少额外控制节点数. 不妨假设, 当 $\xi_i = 1, i \in \{\tau_1, \dots, \tau_l\}$, 且 $\xi_j = 0, j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_l\}$ 时, c_3 取到最小值. 这表明节点 $X_p, p \in \{\tau_1, \dots, \tau_l\}$ 将会被进一步控制以实现(3)全局稳定到不动点 x^* . 此外, 记录满足整数规划问题中约束条件的结构矩阵 $\check{A}_i, i \in \{\tau_1, \dots, \tau_l\}$.

$$\begin{cases} X_p(t+1) &= \hat{U}_p(t) \hat{\oplus}_p \hat{f}_p([X_j(t)]_{j \in \bar{\mathbb{N}}_p}), \\ \hat{U}_p(t) &= \hat{k}_p([X_j(t)]_{j \in \bar{\mathbb{N}}_p}), \end{cases} \quad (62)$$
$$\begin{cases} x_p(t+1) &= \hat{M}_{\hat{\oplus}_p} \hat{u}_p(t) \hat{A}_p \ltimes_{j \in \bar{\mathbb{N}}_p} x_j(t) \\ &= \hat{M}_{\hat{\oplus}_p} \hat{K}_p (I_{2|\bar{\mathbb{N}}_p|} \otimes \hat{A}_p) \Phi_{|\bar{\mathbb{N}}_p|} \ltimes_{j \in \bar{\mathbb{N}}_p} x_j(t), \\ u_p(t) &= \hat{K}_p \ltimes_{j \in \bar{\mathbb{N}}_p} x_j(t), \end{cases} \quad (63)$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ▶ ↺ 🔍 ↻

$$\check{A}_p = \hat{M}_{\hat{\oplus}_p} \hat{K}_p (I_{2|\overline{\mathbb{N}}_p|} \otimes \hat{A}_p) \Phi_{|\overline{\mathbb{N}}_p|}, \quad p \in \{\tau_1, \dots, \tau_I\}. \quad (64)$$

例 5

回顾布尔网络,

$$\begin{cases} X_1(t+1) = X_2(t) \wedge X_3(t), \\ X_2(t+1) = \neg X_1(t), \\ X_3(t+1) = X_2(t) \vee X_3(t). \end{cases} \quad (65)$$

由图可知(65)的一最小反馈弧集为 $\{e_{12}, e_{33}\}$, 则设计以下分布式状态反馈控制实现(65)全局稳定到 δ_8^1 ,

$$\begin{cases} X_2(t+1) = U_2(t) \vee \neg X_1(t), & U_2(t) = X_1(t), \\ X_3(t+1) = U_3(t) \wedge (X_2(t) \vee X_3(t)), \\ U_3(t) = X_2(t) \vee (\neg X_2(t) \wedge \neg X_3(t)). \end{cases}$$

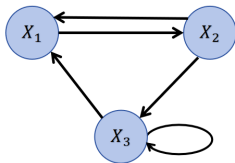


图 4: 布尔网络(65)的网络结构图

例 6

考虑如下两个生物网络，利用反馈弧集的概念，我们可以很快确定实现系统稳定的牵制控制节点（红色标注为控制节点）：

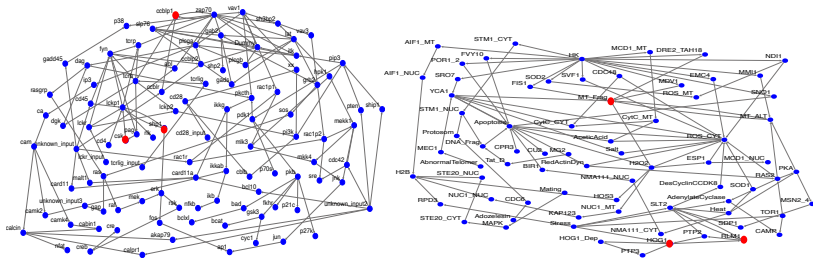


图 5: 网络结构图

Thanks!