第三期矩阵半张量积暑期班

第3讲: 有限博弈的半张量积方法
3.2 势博弈的STP方法

李长喜
lichangxi@pku.edu.cn

北京大学, 工学院

2023年08月14日, 聊城大学

主要内容

1. 势博弈及其基本性质

☞ 什么是势博弈?

- 势博弈最早是由Rosenthal 提出的. Shapley 等人做了许多进一步的完善和发展.
- 势博弈作为一类特殊的博弈有许多优良的性质. 特别是它在演化下会收敛到纳什均衡点的这一特性, 使它倍受青睐.
- 它也因此在许多实际系统的研究中得到应用: 例如, 交通涌塞问题, 电力配给与电网控制等.

☞ 势函数

Definition 1.1

设$G = (N, S, C)$ 为一有限博弈. $|N| = n$, $|S_i| = k_i$, $i = 1, \cdots, n$, $\prod_{i=1}^{n} k_i = k$.

- G 称为一个泛势博弈(ordinal potential game), 如果存在一个函数$P : S \to \mathbb{R}$, 称为势函数, 使得对每个i 和每个$s^{-i} \in S^{-i}$ 均成立:

$$c_i(x_i, s^{-i}) - c_i(y_i, s^{-i}) > 0 \Leftrightarrow P(x_i, s^{-i}) - P(y_i, s^{-i}) > 0, \quad \forall x_i, y_i \in S_i. \tag{1}$$

Definition 1.1(cont'd)

- G 称为一个加权势博弈(weighted potential game), 如果存在一组正数$\{w_i > 0 \mid i = 1, \cdots, n\}$, 称为权重, 和一个函数$P : S \to \mathbb{R}$, 称为势函数,函数$P : S \to \mathbb{R}$, 称为势函数, 使得对每个$i$, 每一组$x_i$, $y_i \in S_i$, 和每一个$s^{-i} \in S^{-i}$均成立:

$$c_i(x_i, s^{-i}) - c_i(y_i, s^{-i}) = w_i \left[P(x_i, s^{-i}) - P(y_i, s^{-i}) \right]. \quad (2)$$

- G 称为一个(纯)势博弈(pure potential game), 如果G 是一个加权势博弈, 且所有权重均为1, 即$w_i = 1, \forall i$.

注意, 我们显然有如下蕴涵关系:

$$\text{势博弈} \Rightarrow \text{加权势博弈} \Rightarrow \text{泛势博弈}.$$

下面是势博弈的一些主要性质:

Theorem 1.2

如果G 是势博弈, 那么, P 在容许一个常数差的意义下唯一. 换言之, 如果P_1 和P_2 为G 的两个势函数, 则$P_1 - P_2 = c_0 \in \mathbb{R}$.

Theorem 1.3

如果G 是势博弈, P 是G 的势函数, s^* 为势函数的一个极大点. 那么, s^* 是G 的一个纳什均衡点. （作业）

下面的推论是显然的.

Corollary 1.4

如果G 是有限势博弈, 由它依串联MBRA 更新方式形成演化博弈, 则该演化博弈收敛于一个纳什均衡点.

熟知, 无论是力学或电场中的势函数对闭路增量为零. 下面的定理显示了博弈中势函数的类似性质. 它也被用来检验一个博弈是否是势博弈.

Theorem 1.5

一个博弈G 是势博弈，当且仅当对每一对$i, j \in N$，选择任何一个$a \in S^{-\{i,j\}}$，一对$x_i, y_i \in S_i$，和一对$x_j, y_j \in S_j$，均有

$$\begin{aligned} & c_i(B) - c_i(A) + c_j(C) - c_j(B) \\ & + c_i(D) - c_i(C) + c_j(A) - c_j(D) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

这里$A = (x_i, x_j, a), B = (y_i, x_j, a), C = (y_i, y_j, a), D = (x_i, y_j, a)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] & D \arrow[l] \\ B \arrow[r] & C \arrow[u] \end{tikzcd}$$

图 1: 闭回路

[1] D. Monderer, L.S. Shapley, Potential Games, *Games and Economic Behavior*, Vol. 14, 124-143, 1996.

2. 势方程

本节推导(加权)势博弈所满足的基本方程, 称势方程.

2.1

一个有限博弈G 是加权势博弈, 当且仅当存在(i) $P(x_1,\cdots,n)$; (ii) $d_i(x_1,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_n)$, $i=1,\cdots,n$, 这里$\hat{}$ 表示没有该项(即, d_i 与x_i 无关); (iii) $w_i>0$, $i=1,\cdots,n$, 使得

$$\begin{aligned} c_i(x_1,\cdots,x_n) &= w_iP(x_1,\cdots,x_n) \\ &+d_i(x_1,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_n), \quad i=1,\cdots,n. \end{aligned} \tag{4}$$

P 称为加权势函数.

将(4) 表示为向量形式, 则得

$$V_i^c \ltimes_{j=1}^n x_j = w_i V_P \ltimes_{j=1}^n x_j + V_i^d \ltimes_{j\neq i} x_j, \quad i = 1, \cdots, n, \quad (5)$$

这里$V_i^c, V_P \in \mathbb{R}^{k^n}$ 以及$V_i^d \in \mathbb{R}^{k^{n-1}}$ 都是行向量, 是相应函数的结构向量.
因此, 检验G 是否是势博弈就等价于(4) 是否存在相应的P 和d_i. 这等价于(5) 是否存在解V_P 和V_i^d.

定义

$$\Psi_i := I_{\alpha_i} \otimes \mathbf{1}_{k_i} \otimes I_{\beta_i}, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{6}$$

这里

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_i = \prod_{j=1}^{i-1} k_j, \ i \geq 2$$
$$\beta_n = 1, \quad \beta_i = \prod_{j=i+1}^{n} k_j, \ i \leq n-1.$$

那么(5) 就可以表示成

$$V_i^d \Psi_i^T = V_i^c - w_i V^p, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{7}$$

从(7) 解出

$$w_1 V^P = V_1^c - V_1^d \Psi_1^T.$$

代入(7) 的其他方程可得

$$w_1 V_i^d \Psi_i^T - w_i V_1^d \Psi_1^T = w_1 V_i^c - w_i V_1^c, \quad i = 2, 3, \cdots, n. \tag{8}$$

定义两组向量如下:

$$\begin{aligned} \xi_i &:= (V_i^d)^T, & i &= 1, \cdots, n, \\ b_{i-1} &:= \left[w_1 V_i^c - w_i V_1^c \right]^T, & i &= 2, \cdots, n. \end{aligned} \tag{9}$$

则(8) 可表达为

$$\Psi^w \xi = b, \tag{10}$$

这里

$$\xi = (\xi_1^T, \cdots, \xi_n^T)^T,$$
$$b = (b_1^T, \cdots, b_{n-1}^T)^T,$$

且

$$\Psi^w = \begin{bmatrix} -w_2\Psi_1 & w_1\Psi_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -w_3\Psi_1 & 0 & w_1\Psi_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -w_n\Psi_1 & 0 & 0 & \cdots & w_1\Psi_n \end{bmatrix}. \tag{11}$$

综合以上的讨论可知:

Theorem 2.2

设$G = (N, S, C)$ 为一有限博弈, $|N| = n$, $|S_i| = k_i$, $i = 1, \cdots, n$. G 是一个以$\{w_i > 0 \mid i = 1, \cdots, n\}$ 为权的加权势博弈, 当且仅当方程(10) 有解. 并且, 如果解存在, 则

$$V^{P_w} = \frac{1}{w_1}\left[V_1^c - \xi_1^T \Psi_1^T\right]. \tag{12}$$

Remark 2.3

- 称(10) 为势方程. 当$w_i = 1, i = 1, \cdots, n$, 加权势博弈变为势博弈. 我们记其系数方程为

$$\Psi := \Psi^w \big|_{w=\mathbf{1}_n^T}.$$

- 如果P^w 和$\tilde{P}^w$ 是权重为w 的两个(加权)势. 定义一个新博弈G', 它将原支付函数改为

$$c_i' = \frac{c_i}{w_i}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

  那么, P^w 和$\tilde{P}^w$ 都是G' 的势函数. 根据定理1.2,

$$\tilde{P}^w - P^w = c_0 \in \mathbb{R}.$$

下面考察石头-剪刀-布游戏.

Example 3.2

考虑两人玩石头-剪刀-布, 支付见表1, 表中: 1: 石头, 2: 剪刀, 3: 布.

表 1: 石头-剪刀-布的支付矩阵

c\P	11	12	13	21	22	23	31	32	33
c_1	0	-1	1	1	0	-1	-1	1	0
c_2	0	1	-1	-1	0	1	1	-1	0

G 是势博弈吗?

Example 3.2(cont'd)

容易算得

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \delta_3[1,2,3,1,2,3,1,2,3]^T \\ \Psi_2 &= \delta_3[1,1,1,2,2,2,3,3,3]^T.\end{aligned}$$

于是有

$$\Psi = [-\Psi_1 \ \Psi_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = V_2^c - V_1^c = [0,2,-2,-2,0,2,2,-2,0]^T.$$

Example 3.2(cont'd)

不难检验: $rank(\Psi) = 5$ 而$rank[\Psi\ b] = 6$, 势方程无解. 因此, 石头-剪刀-布不是一个势博弈.

3. 势方程的结构与解

Proposition

- 记$k_{-i} = \frac{k}{k_i}, \quad i = 1, \cdots, n$. 于是有

$$\xi_0 := \left[w_1 \mathbf{1}_{k_{-1}}^T, w_2 \mathbf{1}_{k_{-2}}^T, \cdots, w_n \mathbf{1}_{k_{-n}}^T\right]^T$$

  是(10) 相应的齐次方程的解. 即, $\Psi^w \xi_0 = 0$.

- $$rank(\Psi^w) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{k}{k_i}\right) - 1 := r_\Psi,$$

  它比Ψ^w 的列数小1.

Theorem

设 $G \in \mathcal{G}_{[n;k_1,k_2,\cdots,k_n]}$. 则以下几点等价:

(i) G 为势博弈.

(ii)

$$\mathrm{rank}[\Psi, b] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{k}{k_i}\right) - 1. \tag{13}$$

(iii)

$$b \in \mathrm{Span}\ \mathrm{Col}(\Psi). \tag{14}$$

(iv) 任选 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$,

$$b \in \mathrm{Span}\ \left\{\mathrm{Col}_j(\Psi) | j \neq i\right\}. \tag{15}$$

本节通过几个例子说明如何应用势方程检验势博弈.

Example 3.1

一个有限博弈G, $|N| = 3$, $|S_i| = 2$, 支付矩阵见表2.

表 2: 例3.1 支付矩阵

c\p	111	112	121	122	211	212	221	222
c_1	a	b	b	d	c	e	e	f
c_2	a	b	c	e	b	d	e	f
c_3	a	c	b	e	b	e	d	f

我们检验对称博弈 G 是否为势博弈?

Example 3.1(cont'd)

利用(6) 可得

$$
\begin{aligned}
\Psi_1 &= (\delta_2[1,2,1,2])^T \otimes I_2 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T ;
\end{aligned} \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi_2 &= (\delta_2[1,1,2,2])^T \otimes I_2 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T ;
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi_3 &= (\delta_4[1,1,2,2,3,3,4,4])^T \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T .
\end{aligned} \tag{18}
$$

Example 3.1(cont'd)

因此可得

$$\Psi = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Example 3.1(cont'd)

下面计算

$$
\begin{aligned}
b_1 &= (V_2^c - V_1^c)^T = [0, 0, c-b, e-d, b-c, d-e, 0, 0]^T \\
b_2 &= (V_3^c - V_1^c)^T = [0, c-b, 0, e-d, b-c, 0, d-e, 0]^T.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
b &= [b_1^T \ b_2^T]^T \\
&= [0, 0, \beta, \beta, -\alpha, -\beta, 0, 0, 0, \alpha, 0, \beta, -\alpha, 0, -\beta, 0]^T,
\end{aligned}
$$

Example 3.1(cont'd)

这里$\alpha = c - b$, $\beta = e - d$. 不难检验

$$\begin{aligned} b \; = \; & (\alpha+\beta)Col_1(\Psi) + \beta Col_2(\Psi) + \beta Col_3(\Psi) \\ & +(\alpha+\beta)Col_5(\Psi) + \beta Col_6(\Psi) + \beta Col_7(\Psi) \\ & +(\alpha+\beta)Col_9(\Psi) + \beta Col_{10}(\Psi) + \beta Col_{11}(\Psi). \end{aligned}$$

根据定理2.2 可知, 当$|N| = 3$ $|S_i| = 2$, $i = 1, 2$ 时, 对称博弈均为势博弈.

Example 3.1(cont'd)

下面, 为计算势函数, 我们给出具体参数. 设$a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, $d = -1$, $e = 1$, $f = -1$. 则不难算出

$$\begin{aligned} b_1 &= [V_2^c - V_1^c]^T = [0, 0, 1, 2, -1, -2, 0, 0]^T \\ b_2 &= [V_3^c - V_1^c]^T = [0, 1, 0, 2, -1, 0, -2, 0]^T. \end{aligned}$$

解势方程(10), 任求一个解$\xi = [3, 2, 2, 0, 3, 2, 2, 0, 3, 2, 2, 0]^T$. 则$V_1^d = \xi_1^T = [3, 2, 2, 0]$. 利用(12) 可得

Example 3.1(cont'd)

$$\begin{aligned} V_P &= V_1^c - V_1^d D_r^{[2,2]} \\ &= [1,1,1,-1,2,1,1,-1] - [3,2,2,0]\delta_2[1,2,1,2] \\ &= [-2,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1]. \end{aligned}$$

最后可得势函数

$$P(x) = [-2,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1]x + c_0,$$

这里$x = \ltimes_{i=1}^{3} x_i \in \Delta_8$.

4. 有限博弈的向量空间分解

☞ 向量空间结构

$$\mathcal{G}_{[n;k_1,\cdots,k_n]}$$

$G \in \mathcal{G}$: $c_i = V_i^c \ltimes_{j=1}^n x_j$, $i = 1, \cdots, n$.

$$G \sim (V_1^c, \cdots, V_n^c) \in \mathbb{R}^{nk}, \quad k = \prod_{i=1}^n k_i.$$

☞ 向量空间分解

$$\mathcal{G}_{[n;k_1,\cdots,k_n]} = \underbrace{\mathcal{P}_p \quad \oplus \quad \overbrace{\mathcal{N}}^{}}_{\mathcal{P}:\ Potential \quad games}\!\!\overbrace{\quad \oplus \quad \mathcal{H}_p}^{\mathcal{H}:\ Harmonic \quad games} . \tag{19}$$

☞ Non-Strategic $\mathcal{N}$

$$c_i(x_i, s^{-i}) - c_i(y_i, s^{-i}) = 0,$$
$$x_i, y_i \in S_i,\ s^{-i} \in S^{-i}.$$

☞ Harmonic $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \mathcal{P}^{\perp}.$$

[1] D. Cheng, On finite potential games, *Automatica*, Vol. 50, No. 7, 1793-1801, 2014 (**Regular Paper**).

[2] D. Cheng, T. Liu, K. Zhang,H. Qi, On Decomposed Subspaces of Finite Games, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 61(11), 3651-3656, 2016.

☞ 历史

- Shapley [3]: $N = 2$, $O(k^4)$;
- Hofbauer 4]: $N = 2$, $O(k^3)$;
- Hino [5]: $N = 2$, $O(k^2)$;
- Cheng [1]: $N = n$, Potential Equation;
- Liu Zhu [6]: $N = n$, minimum order.

Hino (2011): "It is not easy, however, to verify whether a given game is a potential game."

☞ References

[3] D. Monderer, L.S. Shapley, Potential Games *Games and Economic Behavior*, Vol. 14, 124-143, 1996.

[4] J. Hofbauer, G. Sorger, A differential game approach to evolutionary equilibrium selection, *Int. Game Theory Rev.*, 4, 17-31, 2002.

[5] Y. Hino, An improved algorithm for detecting potential games, *Int. J. Game Theory*, 40, 199-205, 2011.

[6] X. Liu, J. Zhu, On potential equation of finite games, *Automatica*, Vol. 68, 245-253, 2016.

☞ 博弈控制论框架 [7]

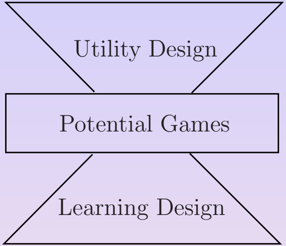

图 **2:** Game Theoretic Approach

[7] R. Gopalakrishnan, J.R. Marden, A. Wierman, An architectural view of game theoretic control, *ACM SIGMETRICS*, Vol. 38, No. 3, 31-36, 2010.

作业

1. 考虑一非对称二人博弈, 支付矩阵见表3.

表 3: G的支付双矩阵

$P_1 \backslash P_2$	1	2
1	(1, 3)	(2, 2)
2	(3, 4)	(4, 3)

它是否为势博弈? 如果是, 计算相应的势函数.

谢　谢　！

Q&A